

第2章

静定構造の力学 — 外力と内力

2.1 つり合い式

2.1.1 つり合っているとは?

構造力学は変形できる物体の力学だとまえがきで述べたが、その変形そのものを取り扱う前に、この章では重要な概念である「抵抗力」を導入する。物体内部の力なので「内力」と総称するが、人間の病気に対する抵抗力と同様目に見えない内部の力なのでわかり難い。だがそれは力には他ならないので、まずその力が満足すべき法則について書いておこう。さて我々は Newton の運動方程式が正しいものだと考えていいだろう。あるいはそれが成立するような場のみを対象としている。そうすると、写真 2.1 (a) にあるような力を受けている starship は、例えば力 F_1 方向の移動量を $u(t)$ としたときに、運動方程式

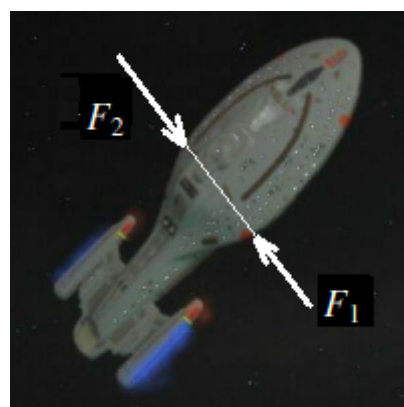
$$\sum [\text{力}] = F_1 - F_2 = m \frac{d^2 u(t)}{dt^2}, \quad m \equiv \int_V \rho dV \quad (2.1a, b)$$

を満足する運動をすることになる。ここに t は時間である。 ρ は starship の密度で、starship の体積 V 上で密度を積分した m は starship の全質量である。もしこの物体が静止しているなら、上式の右辺は零になるため、結局この物体に働いている力は

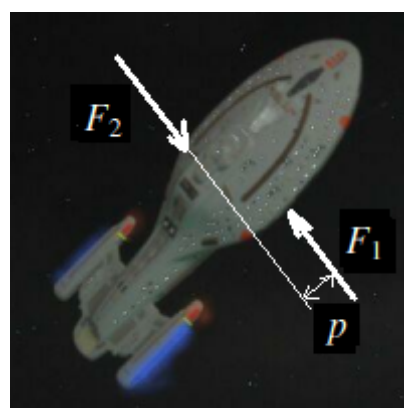
$$\sum [\text{力}] = F_1 - F_2 = 0 \quad (2.2)$$

を満足しなければならない。これが力のつり合い式である。ただ注意しなければならないのは、「力がつり合っている状態」が常に「静止した状態」とは限らないということである。すなわち、式 (2.1a) の左辺が零の場合には右辺の加速度が零になるだけなので、この starship は等速運動をしていればよく、静止している必要は無い。容易に理解できると思うが、宇宙空間の starship のように適切には固定されていない物体の場合は、運動し続けるという答もつり合い式は持っている。

さて、では写真 2.1 (b) にあるように、もし二つの力の作用線が同一線上には無い場合を考えてみよう。もし $F_1 = F_2 = F$ であれば力はつり合っていることになるが、もちろん、この物体が回転することは容易に想像で



(a) 力のつり合い



(b) $F_1 = F_2$ だと力はつり合っているが?

写真 2.1 つり合いとは?

きるだろう。それは、 $p \times F$ という大きさの偶力がこの物体には作用しており、その偶力がこの物体を反時計回りに回転させてしまうからである。すなわち、「つり合い状態」を規定するには力のつり合いだけでは不十分であり、回転運動に関連したつり合いも規定する必要があることがわかる。

例えば、写真 2.2 にあるように、ある点 O から三つの力 F_1, F_2, F_3 の作用線までの距離をそれぞれ p_1, p_2, p_3 とすると、starship の O 点回りの反時計回りの回転移動量を $\theta(t)$ としたときに、その starship は回転についての Newton の運動方程式

$$\sum \text{【モーメント】} = p_1 F_1 - p_2 F_2 + p_3 F_3 = J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} \quad (2.3)$$

を満足する運動をすることになる。ここに J は starship の O 点まわりの慣性モーメントで

$$J \equiv \int_V r^2 \rho dV \quad (2.4)$$

と定義される。ここに r は点 O から物体中の点までの距離である。

したがって、静止した物体の力学の場合は、この Newton の運動方程式 (2.3) の右辺も零になり、この物体に働いている力は

$$\sum \text{【モーメント】} = p_1 F_1 - p_2 F_2 + p_3 F_3 = 0$$

を満足しなければならない。これがモーメントのつり合い式である。

ここまでは簡単のために 2 次元で、かつ力の向きを限定した上でつり合い式を導いた。もし 2 次元で図 2.1 のような一般的な場合には、力のベクトル F_i と作用点までの位置ベクトル p_i との x, y 方向成分同士で上述のようなつり合いを考えれば簡単である。つまり、 x, y 方向の力の成分を添え字 x, y で表すことにすれば、そのつり合いはそれぞれ

$$(F_1)_x + (F_2)_x + (F_3)_x = 0, \quad (F_1)_y + (F_2)_y + (F_3)_y = 0$$

になるということは、容易に理解できるであろう。また原点 O 回りの反時計回りのモーメントのつり合いは、例えば、 F_2 と p_2 を図中で x, y 成分に分解して各自鉛筆で図示しておき、その二つの力成分の反時計回りのモーメントを考えてみるとわかるように

$$\{(p_1)_x (F_1)_y - (p_1)_y (F_1)_x\} + \{(p_2)_x (F_2)_y - (p_2)_y (F_2)_x\} + \{(p_3)_x (F_3)_y - (p_3)_y (F_3)_x\} = 0$$

となる。この二つのつり合い式を 3 次元に一般化し、成分ではなくベクトルそのもので表現すると、それぞれ

$$\sum_{i=1}^3 F_i = \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^3 p_i \times F_i = \mathbf{0} \quad (2.5a, b)$$

と表されることも理解できるだろう。いや、理解できるようになって欲しい。ここに \times はベクトル積（あるいは外積）を示す。では原点回りの式 (2.5b) 同様、任意の点 A 回りのモーメントについてもつり合っているかどうか確かめてみよう。点 A の位置ベクトルを \mathbf{a} とすると、その点 A 回りのモーメントの総和は

$$\sum_{i=1}^3 (p_i - \mathbf{a}) \times F_i$$

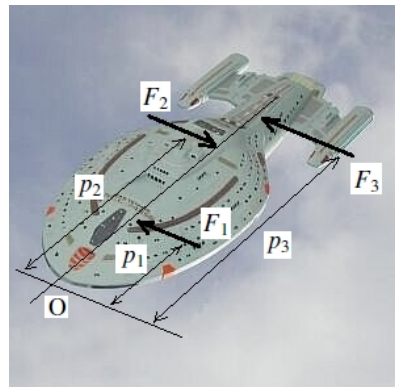


写真 2.2 モーメントのつり合い

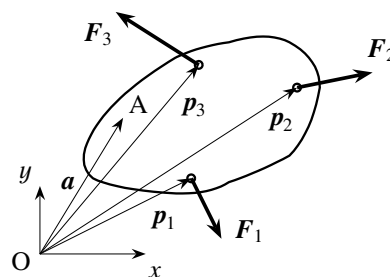


図 2.1 つり合い状態

であるから、次のように展開すれば

$$= \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i \times \mathbf{F}_i - \sum_{i=1}^3 \mathbf{a} \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i \times \mathbf{F}_i - \mathbf{a} \times \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

になるのは理解できるだろう。力のつり合い $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ から三つ目の等号が成立し、O点回りのモーメントのつり合い $\sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ から四つ目の等号が成立するからである。したがって、適切に固定¹された物体に作用している力が式(2.5)を満足しているとき、その物体はつり合い状態にあると呼ぶ。

2.1.2 外力と反力

以上、暗黙のうちに力 \mathbf{F} は物体の外から作用しているものに限定していた。このような、物体にとって外の環境から作用する力を外力と呼ぶ。そこで図1.5で紹介したトラス橋の1パネルを模擬し、3本の部材（太い線はある太さを持った棒）から成る構造を図2.2に示した。点A, B, Cは格点と呼ばれ、そこに集まる部材同士がまっすぐなまま自由に回転できるように接続されていると考えて欲しい。実際にはピンや比較的柔らかい板で接合されている。上の格点Cに作用しているのが外力 P, Q である。このとき下の二つの格点は沈下しないように支えられており、このような通常の支持構造を三角形の記号で描くことが多い。ただ左側Aは三角形記号だけだが、右側Bはその記号の下に線分が描かれている。これは、左の支持は上下方向だけではなく水平方向にも固定されていることを示し、右の支持は水平方向には移動可能であることを表している。右のような支持を三角形ではなく円で表すこともある。

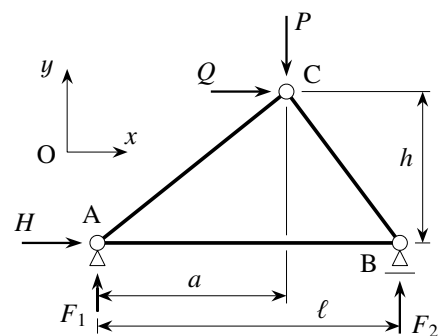


図 2.2 外力と反力

二つの外力を受けたこの構造は、その力を部材が伝達し、支持された2点A, Bで地盤にその力を逃がすことによって外力を支えている。つまり、作用反作用の原理で地盤は構造をこの2点で支えて動かさないようにしている。したがって、動かない構造は支持点で地盤からの力を逆に受けて、地盤に支えられていると考えればいいことになる。このような力を反力と呼んでいる。図の H, F_1, F_2 がその反力である。支点Bは水平方向への移動が自由なので、水平方向の反力は生じない（といったことには早く慣れて欲しい）。このような反力は、構造にとっては外から作用している力とは区別がつかないので、外力として扱えばいいことになるが、気持ちの上では P と Q が原因で H と F_1, F_2 が結果的に生じていると考えるのが望ましい。

この三つの支点反力の大きさは前節で説明したつり合い条件で求めることができるはずだ。 x, y 方向の力のつり合いと、点A回りの反時計回りのモーメントのつり合いは

$$H + Q = 0, \quad F_1 + F_2 - P = 0, \quad \ell F_2 - aP - hQ = 0$$

となる。この3式から反力は

$$H = -Q, \quad F_1 = \frac{\ell - a}{\ell} P - \frac{h}{\ell} Q, \quad F_2 = \frac{a}{\ell} P + \frac{h}{\ell} Q$$

のように求めることができる。支持構造と地盤はこの大きさの力を支えることができないと安全な構造とは言えないわけだ。ただ、反力を求めただけでは、この構造が壊れないように設計されているかどうかはまだわからない。だって部材本体が壊れることをまだ確認してないからだ。つまり、外力を伝達する部材の「内部で何が起きている」のかを調べない限り、構造の設計は完了できていないことになる。

¹ starship がフェーザー砲を撃つと実はその姿勢が変動するはずだが、発射力が無視できるほど starship の質量が大きいと考えるのだから。それに対し、浮遊したガンダム (© サイライズ) が砲を動かただけで体の姿勢も相対的に変わるはずだが、制御工学はすごい。

2.1.3 変形できる物体の抵抗力 — 内力

さて前節では、点Cで受けた外力を部材が支点へと「伝達」すると述べたが、それはどういう仕組みだろう。まえがきにも書いた通り、この文書で取り扱うのは変形できる物体の力学である。つまり、ここで例として扱っている3本の部材でできた構造も、実は外力の作用に対して図2.3に模式的に描いたように、それぞれの部材が伸び縮みしてつり合い状態になっていると考えるべきである。わかり易いように図2.3では各部材をバネで置き換えた。少し誇張して描いたが、支持点Aは動かず、点BはB'の位置に、点CはC'の位置に移動して静止している。ここで各バネが例えば Δ_{AB} 、 Δ_{BC} 、 Δ_{CA} だけ伸びていた²としよう。各添え字は部材の両端の記号に対応している。もし各部材のバネ定数（抵抗係数）がそれぞれ k_{AB} 、 k_{BC} 、 k_{CA} であれば、それぞれのバネには $N_{AB}(\equiv k_{AB} \Delta_{AB})$ 、 $N_{BC}(\equiv k_{BC} \Delta_{BC})$ 、 $N_{CA}(\equiv k_{CA} \Delta_{CA})$ の大きさの抵抗力³が発生していることになる。この抵抗力を内力と呼んでいる。例えば材料がスポンジだと小さい抵抗力しか発揮できない。つまりバネ定数が小さいので、小さい力で大きな伸びが生じてしまう。もし材料が鋼だとバネ定数が大きいから大きな抵抗力を発揮でき、大きな外力を伝達することができ、部材に生じる伸びを小さい状態に留めることができる。そして、そのそれぞれの材料特有の破壊の限界としての伸び変形の限界に相当して、対応する内力にも限界（強度）がある。したがって、もし部材を構成している材料の「強度」を「内力」が超えてしまうと構造は崩壊（破壊）してしまうことになるので、内力が設計における最も重要な量の一つになる。

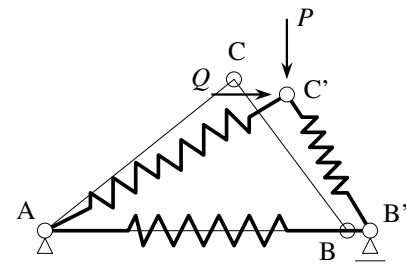


図2.3 変形して支える構造

このような内力は材料が変形することによって生じている力なので、構造全体を眺めている図2.2等に矢印では描くことができない。これが見えるようにするためには（頭の中で）部材を切断してみればよい。切断したことによって材料の内部が見えるようになり、その部材の切断面に内力が生じているように見えるからだ。そこで点Cの近傍で二つの部材を切断してみたのが図2.4である。切断した相対する断面には作用反作用の原理に従って、同じ内力が逆向きに生じていると考えればよい。慣例として「切断面の外向きの力（引張）を正と考えて矢印で描く」ことになっている。

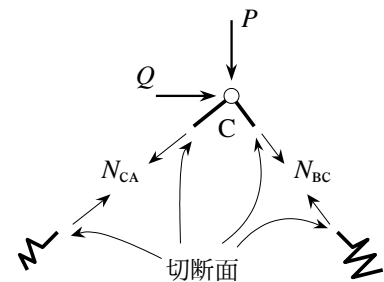


図2.4 切断面に可視化された内力

内力が圧縮の場合は、逆向きの力なのでその値が負になる。この内力を求めるためには、例えば切り離してしまった点Cにおいて、二つの外力 P 、 Q と二つの内力 N_{CA} 、 N_{BC} との四つの力の x 、 y 方向の力のつり合いを考えればよいことになる。切断したことによって内力を（頭の中では）外力と同じように扱うことができるので、内力と外力の間の力のつり合い条件を用いて内力を求めることができる。章題目の「静定」の詳細な定義は第2.4節で述べるが、この例のように、つり合い条件のみで反力のみならず内力も求めることができる構造系を静定な構造系と呼んでいる。

このように、我々が構造設計をする際に必要な最重要情報の一つは内力であり、それは力学的な原理によって求めることができる。したがって、内力という概念と力学原理が理解できない場合には、この文書は多分全く理解できないだろうし、社会基盤構造のデザインはできないことになる。次の節からは、最も基本的な社会基盤構造形態であるトラスと梁を対象として、力学原理を用いて内力分布を求める。そしてそのようにして求められた内力を用いて、トラスと梁の設計の手順について概説する。

² 部材BCは縮んでいるだろうから Δ_{BC} が負の値になるように、伸びそのものを定義してある。

³ 部材ABと部材CAは伸びているので N_{AB} と N_{CA} は正で引張力であるのに対し、 Δ_{BC} は負だったから N_{BC} は負で圧縮力である。

2.2 静定トラス

2.2.1 トラス構造の特徴

(1) 構造の概要

写真 1.8 に示したように、部材の接合点がピンあるいは柔らかい板で結合された、三角形を基本構造とする部材組み構造をトラスと呼ぶ。トラスは古くから鉄道橋⁴でも多く用いられ、既に 100 年以上経った橋梁もあるが、体育館・ドーム等の天井や鉄塔にもトラス構造が使われている。トラス部材は図 2.3 のバネモデルのように、その部材方向の伸び縮みという変形だけで抵抗するといった、最も単純な抵抗則を持っている。したがって、内力も図 2.4 のモデルのように、その部材軸方向の力だけになる。

なぜ三角形を基本としているのかについては、写真 2.3 から一目瞭然であろう。接合点をピンと考えていたため、割り箸を糸で緩く組み立てて作った模型にしてみた。当然なことだが四角形では不安定で自立すらできないが、三角形であれば安定する。しかも写真 1.7 に示したように、荷重がこのように上からのみ作用している場合の下の部材は糸（ケーブル）でも安定している。これは上述のように、各部材には単に圧縮か引張のみが生じている場合が多いためであり、力学的には非常に単純でわかり易い構造になっているからである。そのため、引張部材をケーブルで代用しても、構造全体は安定で強度も確保できることになる。

トラスもそれ以外の社会基盤構造と同様、実際には 3 次元的な広がりを持つ。したがって、厳密には図 2.5 のような奥行き方向も考慮した立体トラスとして考えなければならない。しかしながら、まず主構造としての平面トラスで設計した上で、奥行き方向を別途設計することが普通であり、また、この文書では最も単純な構造の例としてトラスを取り上げることから、ここでは図 2.6 に示したような平面トラスのみを取り扱う。なお実際の部材には太さがあるが、以下たいていの場合はこの図のように、部材を 1 本の太い線で表すので注意すること。またトラスの場合、部材の接合点はピンのようなものだが、○印は原則略す。

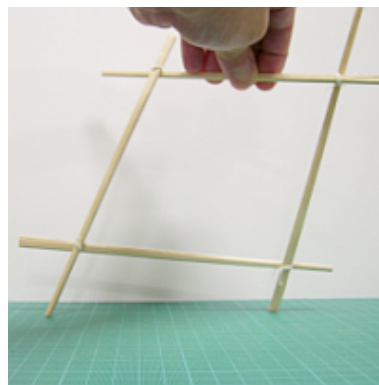
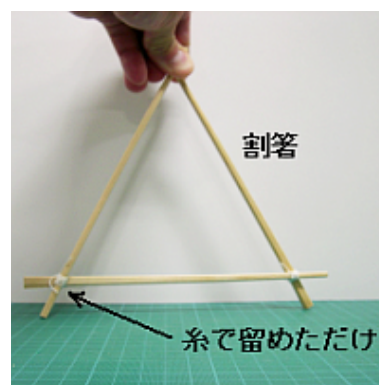


写真 2.3 割り箸で作ったトラス 1 パネル

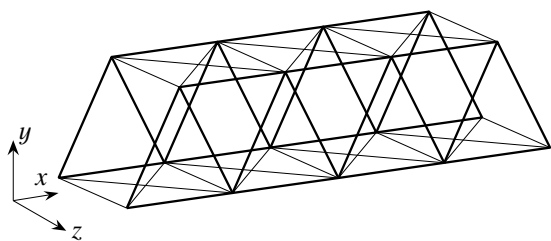


図 2.5 立体トラス

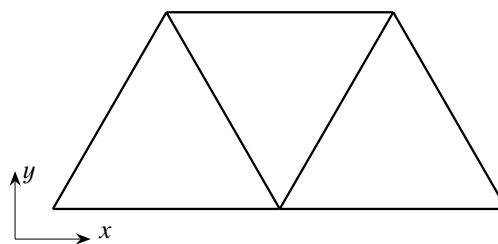


図 2.6 平面トラス

⁴ 写真 1.8 の手前と写真 J.9 に示した伊達橋も典型的な鉄道橋で、移設して歩道・自転車道橋として用いられている。

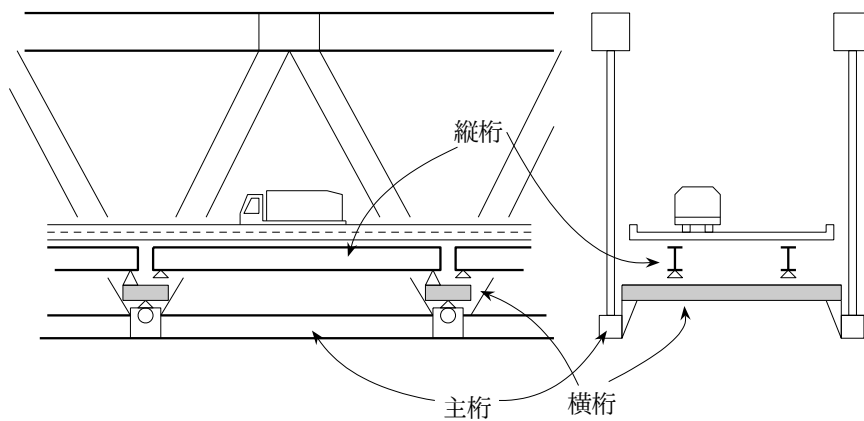


図 2.7 節点へ荷重が伝達される仕組み

(2) トラス構造の特徴と設定

トラスには、重要な特徴が二つある。

特徴 1: トラスを構成する部材（弦材とも呼ぶ）はまっすぐであり、両端はピンで連結されていると仮定する。この連結されている点をここでは節点と呼ぶ。ここまでは格点と呼んでいた。

特徴 2: 外力は節点のみに作用する。

特徴 1 で定義した節点については、写真 1.8 の右側の写真から実際の状況⁵は理解できると思う。ピンの働きは、コンパスの足の結合点や自転車のペダルの取り付け部を思い描けば想像できるだろう。したがって、部材は節点を中心として曲がることなく（まっすぐなまま）回転することができる。また、二つの特徴から導かれる結論は、トラス部材 1 本の抵抗力つまり内力は軸方向の力（後述の軸力）だけだということである。

特徴 2 については疑問を感じると思う。つまり、実際にトラス橋の上を車や列車が通過するところを遠くから観察すると、直接部材の上を通っているように見えるので、節点にだけでなく部材にも直接荷重が作用しているように感じられるかもしれない。しかし実際には、図 2.7 に誇張して示したように、横桁・縦桁を介して主トラス構造の節点のみに荷重が作用するようになっている。一度は現場観察をしてみよう。

2.2.2 断面力の求め方 — 節点法と断面法

(1) 断面を切断すること

トラスの内力を、断面に生じている抵抗力であることから一般的には断面力、あるいは部材の軸方向の力なので軸力と呼ぶことにする。前節でも述べたように、断面力は部材を仮想的に（頭の中で）切断しないと見えるようにはならないが、この断面を仮想的に切断する方法には

1. 節点のそばで切断する
2. トラスを二つに分割するように、三つの部材を切断する

の 2 種類がある。前者を「節点法」、後者を「断面法」と呼ぶ。ただし、部材を切断するときには

切断の約束 1: 元々はくっついていた二つの切断面には、お互いに逆向きに同じ大きさの力が内力として生じている（作用反作用の原理）ことにする。

⁵ 近代的トラスの節点はピンではなくガセットプレートという比較的薄い板を使って 2 部材を接合しているが、主部材の剛性に比べて柔らかくできていることから、設計・解析においてはピンでモデル化される。

切断の約束 2: 切断する前につり合っていた物体は、切断したあともその切断された部分毎につり合っていることにする。

という大事な約束がある。

(2) 節点法

まず節点法の手順をまとめると以下の通りである。

手順 1: 支点反力を求める。

手順 2: 各節点において、連結している部材をすべて切断する。

手順 3: 節点 i と節点 j を結ぶ部材の軸力を $N_{ij} (= N_{ji})$ とし、切断面の外側に向かう方向を正として (引張が正) 作用させる。

手順 4: 節点 (切断点) においては、切断の約束 1 により、逆向きに同じ大きさの力を作用させる。

手順 5: 各節点において水平方向および鉛直方向の力のつり合いを考え、各軸力を算定する。このとき、一番端の節点からつり合いを考えていくと楽かもしれない。

図 2.8 に示した正三角形のトラス構造を例にとって説明しよう。力およびモーメントのつり合い条件から支点反力を求める [手順 1] と、 $R_A = \frac{1}{4}P$, $R_C = \frac{3}{4}P$ になる。各節点で部材を切断し、未知数としての軸力を作用させる [手順 2 (図 2.9)]。切断の約束 1 に従い、各節点に逆向きに同じ大きさの力を作用させる [手順 3 (図 2.10)]。まず点 A におけるつり合いは

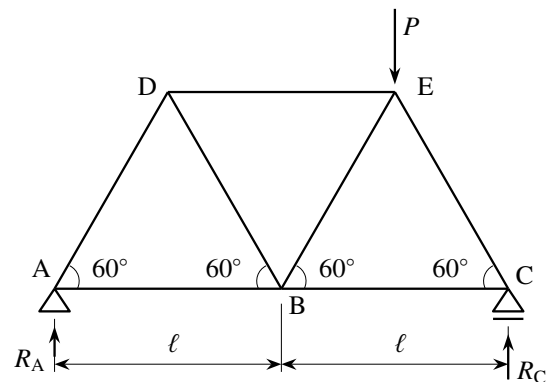


図 2.8 トラスの例

$$\begin{cases} x \text{ 方向} & N_{AB} + N_{AD} \cos 60^\circ = N_{AB} + \frac{1}{2}N_{AD} = 0 \\ y \text{ 方向} & R_A + N_{AD} \sin 60^\circ = \frac{1}{4}P + \frac{\sqrt{3}}{2}N_{AD} = 0 \end{cases}$$

となるので、 $N_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{12}P$, $N_{AD} = -\frac{\sqrt{3}}{6}P$ と各断面力が求められる。

次は点 B でつり合いを考えたいかもしれないが、そこには四つの軸力が作用しているのにつり合い式は二つしか無いので、未知数の方が多くて軸力を確定することができない。そこで点 D を次の対象とするのも一

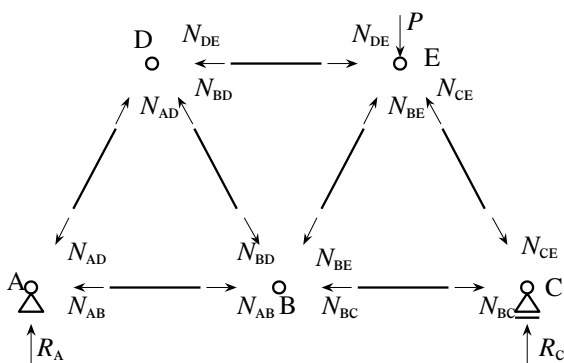


図 2.9 [節点法: 手順 2] 軸力を設定する

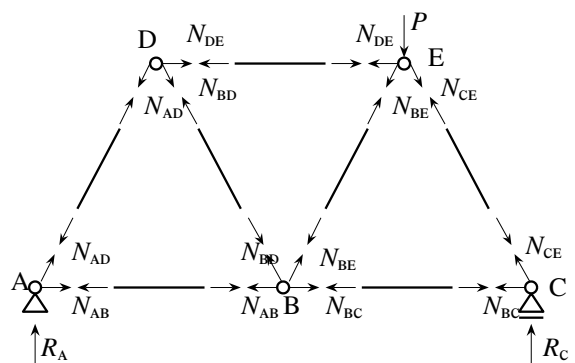


図 2.10 [節点法: 手順 3] 節点に力を作用させる

つのアイデアであるが、ここでは端点Cでつり合いを考えてみよう。それは

$$\begin{cases} x \text{ 方向} & N_{BC} + N_{CE} \cos 60^\circ = N_{BC} + \frac{1}{2}N_{CE} = 0 \\ y \text{ 方向} & R_C + N_{CE} \sin 60^\circ = \frac{3}{4}P + \frac{\sqrt{3}}{2}N_{CE} = 0 \end{cases}$$

だから、 $N_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{4}P$, $N_{CE} = -\frac{\sqrt{3}}{2}P$ のように軸力が求められる。こうすると、点Dにおけるつり合いは

$$\begin{cases} x \text{ 方向} & -N_{AD} \cos 60^\circ + N_{BC} \cos 60^\circ + N_{DE} = -\frac{1}{2}N_{DA} + \frac{1}{2}N_{DB} + N_{DE} = 0 \\ y \text{ 方向} & N_{AD} \sin 60^\circ + N_{BD} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}N_{AD} + \frac{\sqrt{3}}{2}N_{BD} = 0 \end{cases}$$

となるから、 $N_{BD} = \frac{\sqrt{3}}{6}P$, $N_{DE} = -\frac{\sqrt{3}}{6}P$ が各軸力の値である。最後に点Eにおけるy方向のつり合いから

$$N_{BE} \sin 60^\circ + N_{CE} \sin 60^\circ + P = \frac{\sqrt{3}}{2}N_{BE} + \frac{\sqrt{3}}{2}N_{CE} + P = 0$$

を得て、 $N_{BE} = -\frac{\sqrt{3}}{6}P$ が求められる。すべての軸力が求められたので点Bでつり合いは考えなくてもいいはずだが、検算のためにも練習のためにも各自必ず確かめて欲しい。解く順番は未知数の数を考えればわかる。

(3) 断面法

次に断面法の手順は以下の通りである。

手順1: 支点反力を求める。

手順2: トラスの部材を3本切断して二つに分ける。このときトラスは完全に分断されていなければならない。

手順3: 節点iと節点jとを結ぶ部材の軸力を N_{ij} (= N_{ji})とし、切断面の外側に向かう方向を正として(引張が正)作用させる。切断した箇所は三つなので、設定する軸力も三つでなければならないことに注意すること。

手順4: 二つに分けられたトラスの片方だけを用いて、水平・鉛直方向の力のつり合いと、モーメントのつり合いから(切断の約束2)、各軸力を算定する。

この方法を用いて、再度図2.8のトラスの三つの軸力 N_{BC} , N_{BE} , N_{DE} を求めてみよう。

まず全体のつり合いから支点反力を求める[手順1]と、 $R_A = \frac{1}{4}P$, $R_C = \frac{3}{4}P$ となる。一つの例として切断は図2.11のように[手順2]した。切断されたトラスの左側に対してつり合いを考える[手順3]と、x方向の

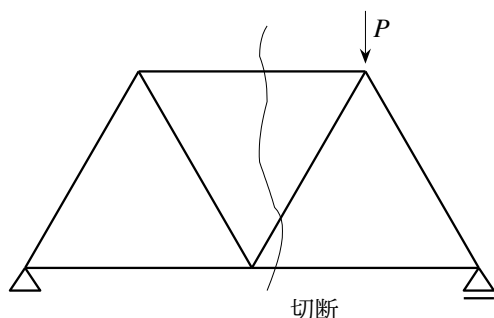


図2.11 [断面法: 手順2] 構造を二つに切断する

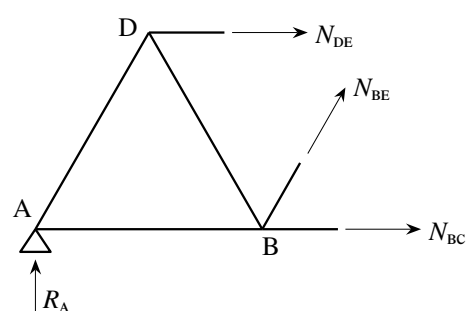


図2.12 [断面法: 手順3] つり合いで軸力を求める

つり合いより

$$N_{BC} + N_{BE} \cos 60^\circ + N_{DE} = N_{BC} + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{BE} + N_{DE} = 0 \quad (*)$$

となり、 y 方向のつり合いより

$$R_A + N_{BE} \sin 30^\circ = \frac{1}{4} P + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{BE} = 0$$

となる。したがって $N_{BE} = -\frac{\sqrt{3}}{6} P$ と求められる。モーメントのつり合いはどこを中心にしてもいいが、式中の未知数は少ない方が楽だし間違いも少ないだろうから、点 B を中心にしてみよう。するとそれは

$$R_A \ell + N_{DE} \frac{\sqrt{3}}{2} \ell = 0 \rightarrow \frac{1}{4} P \ell + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{DE} \ell = 0$$

だから、 $N_{DE} = -\frac{\sqrt{3}}{6} P$ が求められる。以上から、 $N_{BE} = -\frac{\sqrt{3}}{6} P$ と $N_{DE} = -\frac{\sqrt{3}}{6} P$ を上式(*)に代入すると、最終的に $N_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{4} P$ と求められ、節点法の答と一致する。各自の練習のために、他の軸力も同様に求めて欲しい。得られた軸力分布を図 2.13 に棒グラフで示した。

断面法を用いて計算を行う場合には、特に切断箇所には注意しなければならない。図 2.14 には間違っただ切断方法の例を示した。まず図 2.14 (a) では四つの部材を切断しているため、未知数である軸力は四つになっているにもかかわらず、つり合い式は三つしか立てられないため条件が一つ不足し、軸力を唯一に求めることはできない。次に図 2.14 (b) では三つの部材を切断してはいるものの、トラスが二つには分断されていないために、切断の約束 2 を適用することができない。そのため、トラス全体に対するつり合い式しか立てることができず、各軸力は逆向きに同じ大きさで作用しているために打ち消しあうだけで、結果として得ることができるのは支点反力だけである。

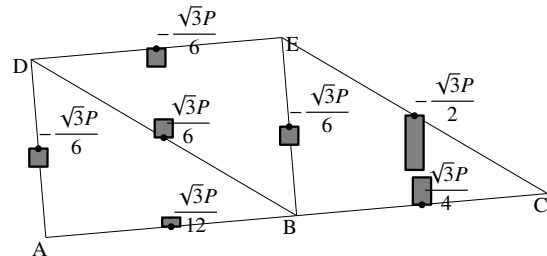


図 2.13 軸力分布図 (標準的な軸力図は図 2.38)

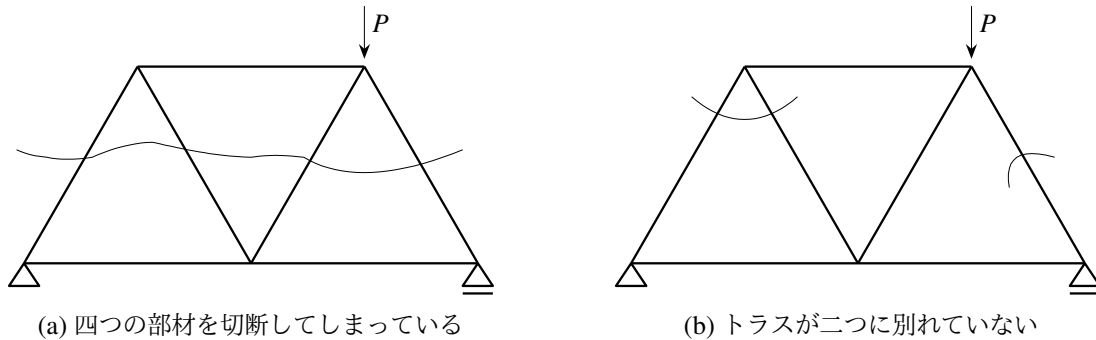


図 2.14 断面法において、うまくいかない切断の例

演習問題 2-1

- 図 2.15 は正方形パネルでできたトラスであるが、部材 1-2, 2-4 が必要かどうかを、軸力を計算せずにじっくり考えてみよ。結論が出たら全部材の軸力を計算し、その結果と自分の推測を比べてみよ。もし、部材 1-2, 2-4 が不要なら、その 2 部材を取り除いたあとの不静定次数 (第 2.4.1 節参照) を計算せよ。また、斜材の向きを右下がりにした (2-3, 4-5 に付け替えた) 場合の結果も推測した上で計算し、どちらの構造がより力学的に効果的か論ぜよ。

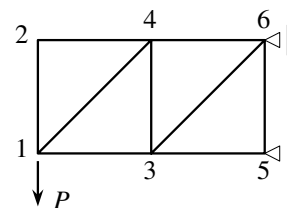


図 2.15 簡単なトラス

2.2.3 影響線と断面設計

(1) 部材を設計するというとは?

前節の例では、荷重の大きさはもちろん、それが作用する場所も与えられた上で軸力を求めていた。機械部品の場合にはそれでよさそうだ。しかし橋梁を設計する場合はどうだろう。普段橋梁に作用している主な荷重は自重(死荷重)と自動車等の荷重(活荷重)である。自重は常に同じ強度で常に同じ場所に作用していると考えていいが、自動車等の荷重は大型車と小型車で重量が異なる上に、橋梁の幅方向・長さ方向共にどの部分にどのように載るかについては決まっているわけではなく、またそれは時々刻々変化する。したがって、設計しようとするある1本のトラス部材に対し、載るであろう種々の荷重をいろいろな場所に配置する等して(実際にはそうしないが)その部材に生じる軸力の最大値(それ以上の軸力はトラスの一生涯で経験しない大きさ)を求める必要がある。そのためには、その部材が最も危険になるように自動車等の載る位置を探すことから始める必要があり、しかもその位置は設計する部材毎に異なる⁶のだ。

現行の設計法では、橋梁の主部材を設計する場合の自動車等の荷重は、図2.16に示したような交通荷重(L荷重)でモデル化[176]されている。これは、ある長さDの区間には q_1 の強度で、それ以外の区間には q_2 の強度で、ある指定された分布外力が載ることを意味する。 q_1, q_2 の値の求め方については第J.5.3節を参照のこと。しかし、この分布荷重をどこに載せたときに設計しようとしている部材が最も危険になるのかを、まず調べる必要がある。

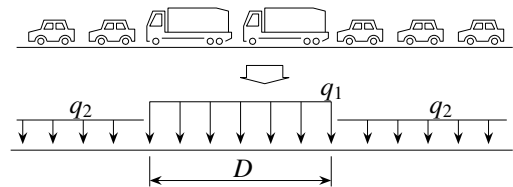


図 2.16 活荷重のモデル

(2) 軸力の影響線

そのためにはまず、単位の大きさを持った集中荷重(注意:単位は無い)を床版に載せ、その載せた位置をいろいろ移動させたときに、設計しようとしている部材がどの程度の軸力で抵抗するのかについて予め探索しておけばよさそうだ。ちょうど患者の顔色や反応を見ながら医者が触診によって病気の原因を探すのと同じように、どの位置の荷重が設計する部材にとってどのくらい「辛い」のかについて探しておくわけである。このような「辛さ」に相当する関数を影響線と呼んでいる。

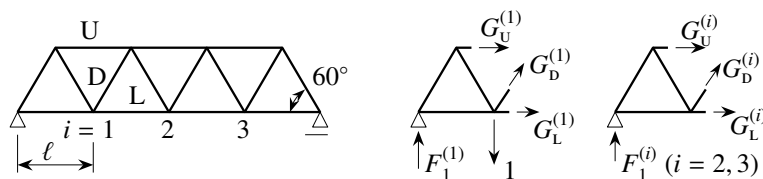


図 2.17 軸力の影響線を求める

例として図2.17に示したような、正三角形のパネルでできた下路トラスの部材U, D, Lの軸力の影響線を求めよう。まず節点 $i = 1, 2, 3$ の位置に大きさ1の集中荷重が作用したときの軸力を求める。 $i = 1$ の位置に荷重があるときの図を左から二番目に描いた。図のように内力を記すと、力のつり合いとモーメントのつり合いは

$$G_u^{(1)} + G_L^{(1)} + \frac{1}{2} G_D^{(1)} = 0, \quad F_1^{(1)} - 1 + G_D^{(1)} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \quad -\ell \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \ell G_D^{(1)} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ell G_U^{(1)} = 0$$

である。支点反力は $F_1^{(1)} = \frac{3}{4}$ であるから、各軸力は

$$G_U^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad G_D^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad G_L^{(1)} = \frac{5\sqrt{3}}{12} \quad (\text{単位は無い, 無次元})$$

⁶ 近年数値的最適化の研究が盛んだが、多くの例で載荷位置が固定されていることに土木構造分野では少なからざる違和感がある。

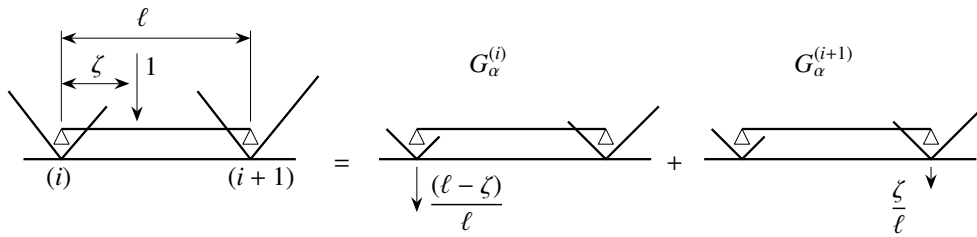


図 2.18 節点間に荷重があるときの考え方

と求められる。同じように節点 $i = 2, 3$ に荷重があるときのつり合いは、右端の図から

$$G_U^{(i)} + G_L^{(i)} + \frac{1}{2} G_D^{(i)} = 0, \quad F_1^{(i)} + G_D^{(i)} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \ell G_D^{(i)} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ell G_U^{(i)} = 0$$

となる。支点反力は $F_1^{(2)} = \frac{1}{2}, F_1^{(3)} = \frac{1}{4}$ なので、各軸力は

$$G_U^{(i)} = -\frac{2}{\sqrt{3}} F_1^{(i)}, \quad G_D^{(i)} = -\frac{2}{\sqrt{3}} F_1^{(i)}, \quad G_L^{(i)} = \sqrt{3} F_1^{(i)}$$

と求められる。

次に荷重が節点と節点の間にあるときを考えてみよう。図 2.7 に示したように、床版上の荷重は縦桁・横桁を通して節点に伝達される。したがって、節点間に集中荷重があるときには、その荷重は両方の節点に図 2.18 のように分配されると考えなければならない。したがって、節点 i から $zeta$ だけ離れた点に荷重が載る時の影響線は、節点に荷重が作用したときの上で求めた値 $G_\alpha^{(i)}, \alpha = U, D, L$ ($i = 0, 1, 2, 3$) を用いて内挿し

$$G_\alpha(z) = \frac{\ell - z}{\ell} G_\alpha^{(i)} + \frac{z}{\ell} G_\alpha^{(i+1)}, \quad G_\alpha^{(0)} \equiv 0, \quad G_\alpha^{(4)} \equiv 0$$

になることは容易に理解できるだろう。つまり、载荷位置 x の関数として捉えた影響線は、節点に作用したときの影響線の値を線形補間すれば（直線で結べば）いいことになる。このようにして描いたのが図 2.19 である。横軸の x は単位荷重を載せた位置であることに十分注意しなければならない。ここは初学者がまずわからなくなるところなので注意して欲しい。

上弦材 U の影響線は常に負の値であることから、荷重がどこに載っても常に圧縮力が生じていることがわかる。逆に下弦材 L は常に引張で抵抗する。これに対し、斜材 D の影響線は $x < \frac{4\ell}{3}$ までは正の値をとることから、その範囲に荷重が載ると引張抵抗をする。そして $x > \frac{4\ell}{3}$ の部分に荷重がある場合には圧縮力が生じている。実は、今はわからなくてもいいが、引張と圧縮で強度が異なる場合がある。したがって斜材は通常、圧縮および引張の両方に抵抗できるように設計されなければならないことになる。

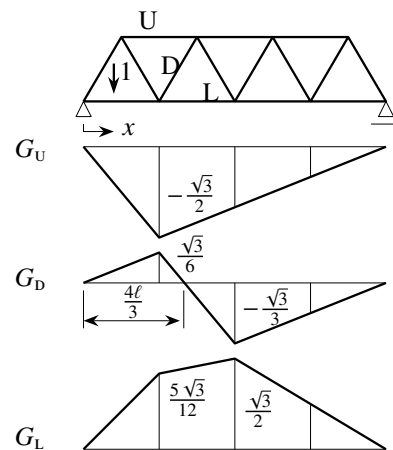


図 2.19 軸力の影響線

(3) 最大軸力

このようにして求めた影響線を用いれば、設計する部材にとって最も不利になるように（辛くなるように）設計荷重を載せる位置を決定できるのだが、まず例として、ある一つの集中荷重の大きさとその位置が与えられたときに、影響線を用いて軸力を求める方法を考えてみよう。例えば図 2.20 の一番左の図を見て欲しい。影響線は大きさ 1 の集中荷重（単位は無い）が載ったときの軸力だったから、もし左から x_1 の位置に集中荷重 P_1 （単位は例えば N）が作用したときの下弦材の軸力は $P_1 \times g_1$ （単位は N）になることは容易に理解できる

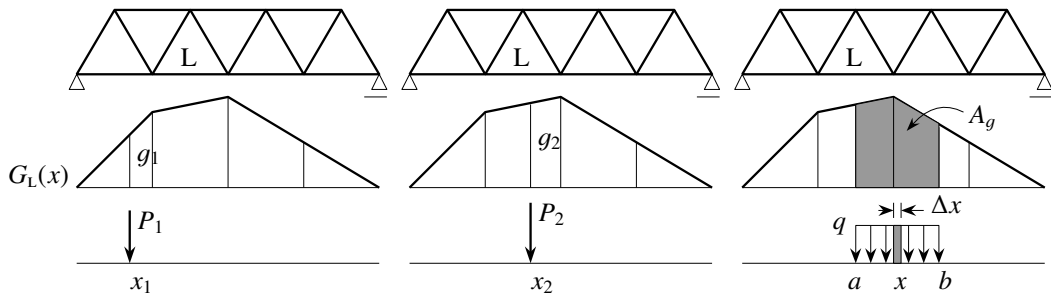


図 2.20 影響線を用いた軸力の算定の仕方

と思う。では、中の図のように x_2 の位置に P_2 が載った場合には当然 $P_2 \times g_2$ が軸力になる。したがって、もし両方の荷重が同時に作用している場合に下弦材に生じる軸力は、この二つを重ね合わせて $P_1 g_1 + P_2 g_2$ になるのもわかると思う。

では、一番右の図のように強度 q （単位は N/m ）の様な分布荷重が $a < x < b$ の区間に作用した場合はどうすればいいだろう。まず分布荷重をあたかも集中荷重の集合のように捉え、ある位置 x の微小区間 Δx 分の分布荷重 $q \times \Delta x$ が点 x に作用している「集中荷重」だと解釈してみよう。そうすると下弦材の軸力は、上述の二つの集中荷重を載せた場合を拡張して、通常の Riemann 積分の定義を思い出せば

$$N_L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b (q \Delta x) G_L(x) = \int_a^b q G_L(x) dx = q \int_a^b G_L(x) dx = q \times A_g \quad (\text{単位は } N) \quad (*)$$

になることも理解できるだろう。分布荷重が一樣なので積分の外に出すことができ、したがって最後の等式が示すように、影響線面積 A_g （単位は m ）に q を乗じれば下弦材の軸力が算定できる。 A_g は図の網掛けした部分の面積である。このように、一旦影響線を求めておけば任意の荷重に対する軸力を容易に求めることができる。この性質を逆に使って、その部材が最も危険になるような荷重の位置を決める手法を説明しよう。

さて図 2.16 に示したように、橋梁の主部材を設計する場合には 2 段階の大きさの等分布荷重を作用させることになっている。そこで、この分布荷重をどのように載せると、設計しようとしている部材が最も危険に（辛く）なるのかを決めるために、影響線を用いる手法を説明しよう。ここでは簡単のために、 $D = 10m$ とし、トラスの 1 パネルの長さも $l = 10m$ として、影響線が単純な関数になっている上弦材を例にして、その設計をしてみよう。単位を揃えるために q_1, q_2 も N/m の単位で与えられているものとする。上式(*)のように、分布荷重が作用したときの軸力は、分布荷重の強度と影響線面積を乗じればよかった。したがって、影響線の面積ができるだけ大きくなる箇所に、強い強度の q_1 を分布させればいいことがわかる。そこで図 2.21 に示したように、左端から ζ の位置から q_1 を載せ、図の網掛け部分の面積が最大になるように ζ を決定しよう。

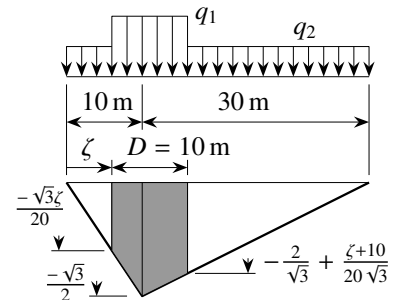


図 2.21 載荷位置を決定する

この網掛け部分の面積（負）は、この例の場合には

$$A_g = -\frac{1}{2} (10 - \zeta) \left(\frac{\sqrt{3}\zeta}{20} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{2} \zeta \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\zeta + 10}{20\sqrt{3}} \right)$$

となるので、 $\frac{dA_g}{d\zeta} = 0$ を計算すると ζ は

$$0 = \frac{\zeta}{5\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \zeta = \frac{15}{2} = 7.5m$$

と求められる。すなわち、左端から 7.5 m の位置から q_1 を 10 m 分だけ載せたときに、上弦材には最大の軸力が発生することを意味する。この $\zeta = \frac{15}{2}$ を上式に代入して面積を求めると $A_g = -\frac{35\sqrt{3}}{8}$ になる。また、左の白い三角形の面積は $-\frac{45\sqrt{3}}{32}$ 、右の白い三角形の面積は $-\frac{135\sqrt{3}}{32}$ であるから、合計は $-\frac{45\sqrt{3}}{8}$ になる。したがって、図 2.16 の設計用の荷重が図 2.21 のように載ったときに、設計上は上弦材に最も大きな軸力が生じることになる。これを、このトラスの一生でそれ以上の軸力は生じないことから**最大軸力**と呼ぶが、この例ではそれが

$$(N_U)_{MAX} = -q_1 \frac{35\sqrt{3}}{8} - q_2 \frac{45\sqrt{3}}{8} < 0 \quad (\text{単位は N}) \quad (**)$$

と求められる。あるいは図 2.21 の影響線の全面積を A_t とすると $A_t = -10\sqrt{3}$ となり、これを用いて $(N_U)_{MAX} = (q_1 - q_2) A_g + q_2 A_t$ でも同じだ。この算定の仕方の方が、上の $\frac{dA_g}{d\zeta} = 0$ にする意味はわかり易いかもしれない。いずれにしても最大軸力に対して部材が破壊しないように断面を設計すれば安全だということになる。

(4) 断面の設計

トラス部材は単純に軸力で抵抗する物体だと説明したが、材料を変えないで強くするにはどうしたらいいだろう。そこで簡単のために、トラス部材を図 2.22 のようなバネで置き換え、左上の 1 本のバネは力 F までは壊れないものとする。そのバネを下図のように 2 本直列にしても、支えられる力は F のままであることはすぐにわかるだろう。しかし、右上のように並列にすると、それぞれが F まで支えるので、合計で $2F$ までの力を支えることができる。したがってトラス部材の場合にも、同じ材料で造るなら、太くすればするほど強い構造になることは容易に推測できる。つまり、部材の断面面積を大きくすれば強くなるのだ。このことを踏まえて、材料規格では単位面積当たりの抵抗圧力（おうりよく 応力と呼ぶ）のある種の最大値でその強度が規定されている。

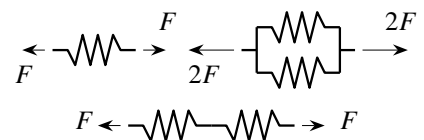


図 2.22 並列は強い — 断面積が鍵

例えば前節の上弦材にしたい材料の圧縮強度 $\sigma_a^{(c)}$ が、単位面積当たりの圧力値（応力値）として決められている場合、断面積 A_U の上弦材が支えることができる最大の断面強度（軸力で表した強度）は $\sigma_a^{(c)} A_U$ になる。これが、前節で求めた最大軸力（圧縮なので前節の式(**)は負）の絶対値 $|(N_U)_{MAX}|$ より大きければ安全に設計されたことになる。つまり上弦材の安全確保のためには（断面の強度） \geq （実際に生じる軸力）ならいいから

$$\sigma_a^{(c)} A_U \geq |(N_U)_{MAX}| \rightarrow A_U \geq \frac{|(N_U)_{MAX}|}{\sigma_a^{(c)}} \quad (2.6)$$

を満足するように断面積 A_U を決定すれば（断面を設計すれば）、安全な設計ができたことになる。

下弦材の場合には節点 $i = 2$ で影響線が最大値をとることから、やはりその前後に大きい方の q_1 の荷重を載せるようにして、 q_1 に対する影響線面積が最大になるようにその位置を決定すればいい。結局図 2.23 のように載荷する位置を探し出し、影響線面積を用いて $(N_L)_{MAX}$ を算定しさえすれば、上弦材と同様

$$A_L \geq \frac{(N_L)_{MAX}}{\sigma_a^{(t)}} \quad (2.7)$$

を満足するように、断面を設計すればいいことになる。ここで $\sigma_a^{(t)}$ は引張に対する材料強度である。一方斜材の場合には、載せる位置によって軸力の符号が変化するため、圧縮と引張に対して別々に最大軸力を求める必

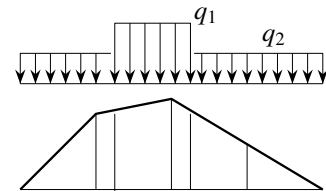


図 2.23 下弦材のための載荷位置

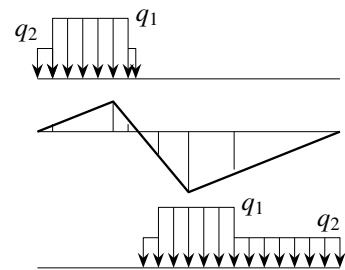


図 2.24 斜材のための載荷位置

要がある。具体的には図2.24のように、引張に対しては上段の図に示した正の影響線部分のみへの荷重に対する最大軸力 $(N_D^{(t)})_{\text{MAX}}$ を算定し、圧縮に対しては下段の図の負の影響線部分のみへの荷重に対して最大軸力 $(N_D^{(c)})_{\text{MAX}}$ を計算し、引張と圧縮のそれぞれに対して上下の弦材と同様に

$$A_D \geq \frac{(N_D^{(t)})_{\text{MAX}}}{\sigma_a^{(t)}}, \quad A_D \geq \frac{|(N_D^{(c)})_{\text{MAX}}|}{\sigma_a^{(c)}} \quad (2.8a, b)$$

の両方が同時に満足されるように断面積 A_D を決定（設計）することになる。材料強度が圧縮と引張で異なるのは奇妙に感じられるかもしれない。しかし、使う材料によってはそのようなことがある。例えばコンクリートは圧縮には強いが、引張られるとすぐにひびが入って壊れることがある。あるいは第6章で説明する座屈現象のために、圧縮と引張とでは強度が異なる（第6.4.5, 6.4.6節の式(6.61)(6.62)参照）こともあるので、このような2重の確認が必要⁷になる。

演習問題 2-2

2. $D = 10\text{ m}$, $\ell = 10\text{ m}$ として、下弦材と斜材に対する荷重位置を具体的に（図2.23, 2.24のこと）求め、最大軸力を求めよ。

2.3 静定梁

2.3.1 梁の特徴と断面力の定義

(1) 細長いトラス — 曲げモーメントという抵抗力とは

いよいよ第1章の最初に見た「桁」の力学を考えよう。図2.25に示したのは、クレーンのアーム構造のような細長いトラス構造である。全部で K 個の四角パネル ($p = 1 \sim K$) から成り、先端に荷重 P が作用している。まず反力を求めると、 x, y 方向の力のつり合いと、先端の P の荷重点におけるモーメントのつり合いが

$$F_1 + F_2 = 0, \quad S - P = 0, \quad KhS - hF_1 = 0$$

となるので、 $F_1 = -F_2 = KP$, $S = P$ と求められる。次に断面法を用いて第 k パネルで切断し、上下弦材と斜材の軸力をそれぞれ N_1, N_2, N_3 として、つり合いをとると

$$N_1 + N_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_3 = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} N_3 - P = 0, \quad -hN_1 + (k-1) \frac{h}{\sqrt{2}} N_3 = 0$$

である。ここもモーメントのつり合いは P の荷重点でとった。したがって、各部材の軸力は

$$N_1 = (k-1)P, \quad N_2 = -kP, \quad N_3 = \sqrt{2}P \quad (*)$$

と求められる。鉛直材は、両端の2本の軸力が零⁸で、それ以外はすべて $-P$ である。

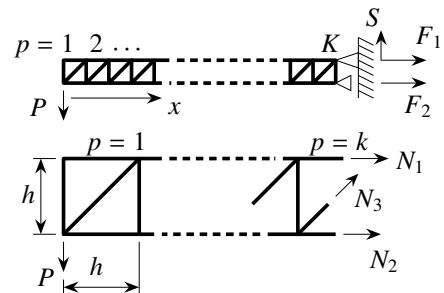


図 2.25 細長いトラス構造

⁷ 本当はそういうことは不要なはずで、断面を決めたあとにコンピュータ等で性能を確認すればいいと思うかもしれない。しかし、その入力データの断面をまずどうやって概算するのかということ考えると、力のかかり具合で強度を区別しておくのも便利なのだ。

⁸ 左端は上弦材の軸力が零なので不思議ではないが、右端の鉛直材の軸力が零になるのは不思議でならないのではないか。演習問題 2-1 の問題 1 の解答（自分でまず解いてください）を参照のこと。右端の支持条件を変更して、上を鉛直方向自由にして下を止めることにすると、右端の鉛直材の軸力は $-P$ になり、この場合は不思議は無い。

では、図 2.25 に示した細長いトラスを、そのそれぞれの弦材が見えないくらい遠くから眺めてみると、実は細長い棒で P を支えているように見える。こうすると、右端の支点反力を図 2.26 の右図のように捉えることはできないだろうか。つまり、この場合は x 方向には荷重を加えていないので、 x 方向の反力は当然 $F_1 + F_2 = KP - KP = 0$ であるが、それ以外に y 方向の反力 V_0 と、図に描いたような反時計回りの反力モーメントと呼ばれる M_0 が、この細長い棒を固定するための反力として壁の側に発生すると考えるのである。鉛直方向の「反力」 V_0 は $V_0 = P$ 、また「反力モーメント」 M_0 という概念は

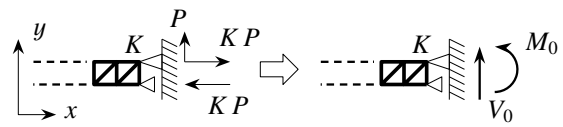


図 2.26 壁における全反力

$M_0 = (h \text{ 離れて作用する } F_1 \text{ と } F_2 \text{ が作る偶力}) = h \times (-KP) = (Kh) \times (-P) = -(\text{棒の長さ}) \times P$ (**)

になっている。

次に、トラスの任意の位置 x に断面法で切断を入れた上で、3本のトラス部材の個々の断面力ではなく、上で導入した反力と同じように考えて、その位置 x の切断面全体に生じた力の総和（3軸力の合計）としての新しい内力を定義する。これが図 2.27 の中段に示した二つの断面力、「せん断力」 V と「曲げモーメント」 M である。前者はハサミで紙を切るときの力の作用⁹に似ているので「せん断」の意味もわかり易いと思うが、後者は右端の「反力モーメント」の考え方に合わせたもので、名称については後述する。図の幾何学的な関係から

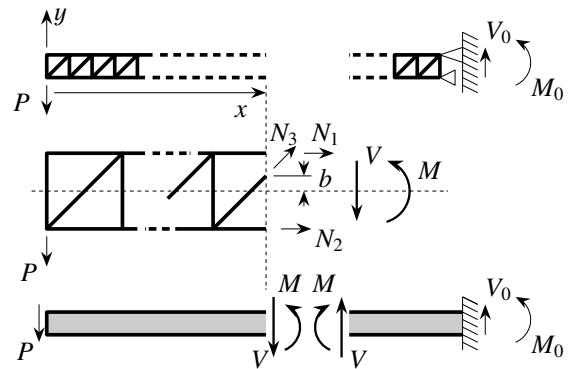


図 2.27 細長い棒の断面力

$$V \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} N_3, \quad M \equiv \frac{h}{2} N_2 - \frac{h}{2} N_1 - b \frac{1}{\sqrt{2}} N_3$$

と定義できる。ここで x が第 k パネルの途中であれば

$$b = \{x - (k - 1)h\} - \frac{h}{2} = x - \frac{h}{2}(2k - 1)$$

なので、この式と上式 (N) の N_1, N_2, N_3 とを上式に代入すれば「せん断力」と「曲げモーメント」は

$$V = -P, \quad M = -xP \tag{a}$$

と求められる。右端の M を求めると、 $x = (\text{棒の長さ})$ なのでそれは上式 (**) の M_0 に一致する。ただ右端では $V = -V_0$ になっているが、これは内力 V と外力 V_0 の向きを逆に定義したからである。

つまり図 2.27 の下段に示したように、細長い棒（網掛けした部分はトラスではなく中実棒）でできた構造の左端に「せん断外力」 P を載せたときに断面に発生する抵抗力（内力）は単純な軸力ではなく、この図のように「せん断力」と呼ばれる棒の軸に直交する方向の断面力と、断面に生じている偶力¹⁰つまり「曲げモーメント」との二つだと考えなければならない。このような载荷では棒が壁に対して相対的に下方にたわむ¹¹ので、その変形状態を「曲げ」と呼び、 M を「曲げモーメント」と呼んでいる。ちなみに、この二つの断面力も、切

⁹ ちょうどハサミで紙を切るときの切断面における刃による力の作用が、図 2.27 の下段に示した V の作用とほぼ同じになっている。

¹⁰ テコの原理から推測して欲しい。著者も学生時代には理解するのに苦労した。

¹¹ 釣竿を思い描こう。もちろん図 2.25 のトラスも同じようにたわむのだが。

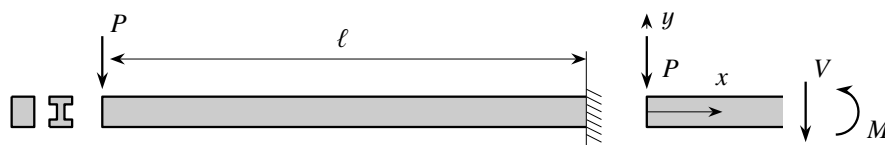


図 2.28 片持ち梁のせん断

断した断面には p.20 に示した「切断の約束」を満足するように、お互いに逆向きで同じ大きさの断面力を作用させなければならない。切断した断面の外向き法線ベクトルが x 方向を向いている面を正の面と呼ぶが、慣習として、その面に作用する y の負方向のせん断力を正とし、反時計回りの曲げモーメントを正とする。これに対して、切断した反対側の面、つまり断面の外向き法線ベクトルが x 方向とは逆向きな面を負の面と呼び、せん断力は y 軸の正方向を正、曲げモーメントは時計回りを正とする。第1章のスポンジの写真で、桁の中に生じる偶力として曲げモーメントを紹介したが、この節の説明でその力学的定義が理解できれば、構造力学の基本的な梁理論の8合目まで到達したも同然である。ここが勉強の最初の踏ん張りどころである。以上、トラスを遠くから見ることによって梁の説明を試みたが、図 2.27 の下段の断面力の発生をすぐに理解できる読者は、トラスとの関係は忘れてもらっていい。

(2) 梁とせん断力・曲げモーメント

前節のように、細長い棒が横荷重¹²つまりせん断外力を受け、曲がって支える構造部材を梁と呼ぶ。そのとき、梁の断面にはせん断力と曲げモーメントという内力つまり断面力が生じて抵抗すると考えていいことがわかった。そして、例えば図 2.28 のように片端が剛な壁に固定さ(埋め込ま)れて、もう片端が自由に移動できる梁を片持ち梁と呼ぶ。断面は第 1.1 節で例に用いたスポンジのように長方形断面であったり、鋳桁やレールのような I 形断面等である。

断面力を求めるには、トラスと同様、断面を仮想的に切断する必要がある。しかしトラスとは異なり、1部材中であっても断面力は場所によって異なるため、場所 x の関数となり一定ではない。したがって断面法を用いざるを得ない。そこで左端から x の位置に切断面を入れ、図 2.28 の右側の図のように断面力を正しい向きで設定し、例えばこの切断面より左側でつり合いをとると

$$-P - V = 0, \quad M + xP = 0$$

となる。モーメントのつり合いは切断面の回りでとった。したがって、断面力は

$$V = -P, \quad M = -xP \tag{b}$$

と求められ、トラスから求めた上式 (a) と一致する。なお、切断面より右側のつり合いを用いても同じ結果を得ることはできるが、その場合にはまず右端の支点反力を求めておく必要がある。求められたこの断面力の結果を図 2.29 に示した。それぞれをせん断力図および曲げモーメント図と呼び、前者は上向きを正に、後者は下向きを正にとる¹³ことが多い。なおこれ以降、梁を1本の線で描き断面の形を具体的には示さない場合が多い。しかし、ある厚さ(高さ)と幅を持った断面の棒であることを、常に忘れないで欲しい。

¹² 棒の軸線に直交する y 方向への荷重を慣習的にそう呼ぶ。 z 方向(梁の側面へ)の荷重ではない。

¹³ 正の曲げに対する引張側に線が描かれるようにしたもので、学ぶ機関や本によってこの規則は異なるので注意すること。



図 2.29 片持ち梁のせん断

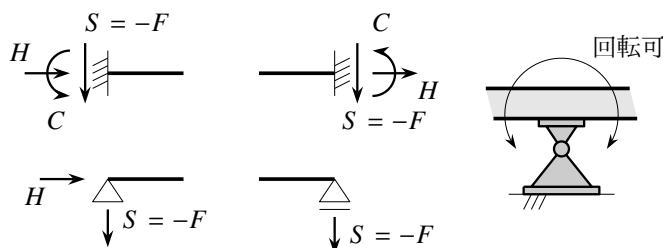


図 2.30 梁の代表的な支持条件と正の外力・反力の向き



写真 2.4 橋脚天端に載っている支承

2.3.2 代表的な例

(1) 荷重と境界条件

梁の場合はトラスと違って、支間のどの位置にも集中荷重を作用させることができると考える。また床版に載った図 2.16 のような活荷重も、そのまま梁に直接載る¹⁴分布荷重と考えていいことになっている。また代表的な支持条件は、前節で取り扱った片持ち梁のように、壁に埋め込まれたようなものや自由なものを以外に、単純に支えているだけのものがある。支持記号と、それぞれの場合の発生可能な支点反力を図 2.30 に示した。三角形で表した支持は、トラスの場合と同様、三角記号だけの場合は水平方向にも固定されていることから荷重によっては水平反力 H が生じる。三角記号の下に線分がある場合は、水平方向は自由に移動可能で水平反力は生じない。なお反力と外力は、水平方向は x 軸の正方向を正の力 H とするが、鉛直方向は重力場の自重を念頭に置き、慣習として y 軸の負の方向を正の¹⁵力 S とする。ただし、この章だけでは地盤反力を念頭に置いて y 軸の正の方向を正として F で表していることに注意して欲しい。また外力（反力）モーメント C については反時計回りを正とする。埋め込み端で反力モーメントが生じることは、前節の細長いトラスの端部の状況説明を思い出せば理解できるであろう。

写真 2.4 の支承は、水平方向の移動も固定した単純支持装置で、ピン支承と呼ばれている。これは図 2.30 の右側の図に模式的に描いたように、ピンを中心にして桁が回転できるようになっているため、反力モーメントは生じない。ただし、この写真の支承はゲルバー梁（牛越橋）の中間支点なので、図 2.42 に示すように内力の曲げモーメントは零にならないことには注意するように。

(2) 片持ち梁

図 2.31 の等分布荷重 q を受ける片持ち梁を解いてみよう。ここでは、トラスの断面法の手順と同じように解くことにする。 y 軸下向きの等分布荷重しか作用していないので、まず支点反力は、鉛直上向きの反力 F と反時計周りの反力モーメント C だけである。外力と反力のつり合いは

$$F - \int_0^\ell q dx = F - \ell q = 0, \quad C - \int_0^\ell xq dx = 0$$

であるが、モーメントのつり合いは、等分布荷重をその分布の重心、つまりスパン中央 ($x = \frac{\ell}{2}$) に総力 ($q\ell$) を作用させても同じだから $C - \frac{\ell}{2}(q\ell) = 0$ と考えてもよく、結局

$$F = q\ell, \quad C = \frac{q\ell^2}{2} \tag{c}$$

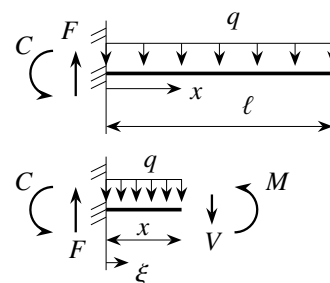


図 2.31 等分布荷重を受ける片持ち梁

¹⁴ より厳密には第 4 章で説明する図心位置に荷重は載ると考えなければならないのだが。

¹⁵ なお第 4 章では z 軸を下向きにとり z - x 面内で梁の挙動を記述する。そしてせん断外力 S は z 軸方向を正とする。

と求められる。もちろん積分を実行しても同じ結果を得る。

次に、埋め込み端から x の位置で断面を切断し、そこに正しい向きの断面力を発生させた上で、梁の左側の部分のつり合いを考える。もちろん、切断面よりも右側部分のつり合いを考えれば式 (c) の反力を求めておかなくてもいいのだが、ここでは後述する単純梁等の場合にも使える一般的な手順をとった。モーメントは切断面回りで考えると

$$F - \int_0^x q \, d\xi - V = 0, \quad C + M + \int_0^x (x - \xi) q \, d\xi - xF = 0$$

になる。 ξ は x 方向の積分をするためのダミーの座

標である。積分してもいいが、反力を求めたときと同様に分布荷重を総力が重心に作用した集中荷重で置き換えれば

$$F - (qx) - V = 0, \quad C + M + \frac{x}{2}(qx) - xF = 0$$

としてもいい (図を見ながら自分で考えて欲しい) から、上式 (c) を代入して解くと

$$V(x) = q(\ell - x), \quad M(x) = -\frac{qx^2}{2} + x\ell q - \frac{qx^2}{2} = -\frac{q}{2}(\ell - x)^2 \tag{d}$$

と、せん断力と曲げモーメントの分布が求められる。前節の例と異なり埋め込み端を左端にしたので、せん断力の符号が変わっていることに注意して欲しい。ところで、前節の式 (b) の場合もそうであったが、上式 (d) の場合も

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx}, \quad (\text{せん断力}) = (\text{曲げモーメントの変化率}) \tag{2.9a, b}$$

が成立することは覚えておいて¹⁶欲しい。つまり、曲げモーメント図がわかったときには、その傾きがせん断力図になる。上の結果を図 2.32 に示した。

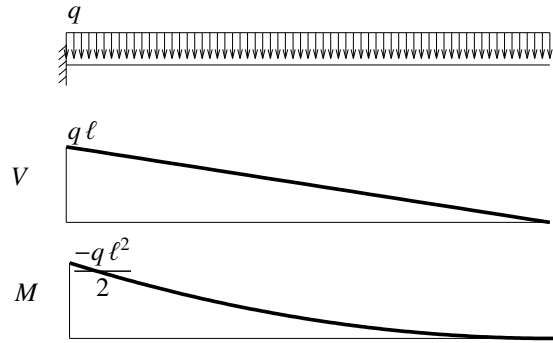


図 2.32 断面力図

(3) 単純梁

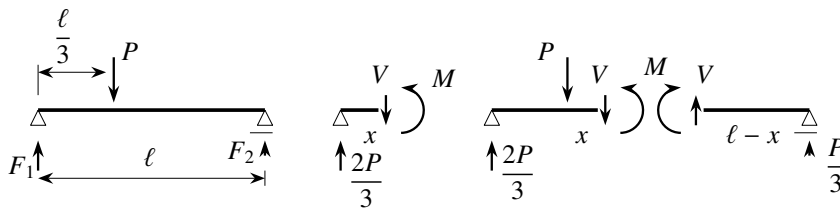


図 2.33 集中荷重を受ける単純梁

集中荷重を受ける場合: 両端が単純に支持されているだけの梁を単純梁あるいは単純支持梁と呼ぶが、ここではその中間部に集中荷重が作用した図 2.33 を対象としよう。まず支点反力を求めるために、反力と外力のつり合いをとると

$$F_1 + F_2 - P = 0, \quad \ell F_2 - \frac{\ell}{3}P = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 = \frac{2P}{3}, \quad F_2 = \frac{P}{3}$$

と求められる。モーメントは左端の回りでとった。

¹⁶ 突然の微分方程式に驚く必要は無い。断面力図の検算のために覚えておけばいいということである。

次に、集中荷重を載せた点よりも左側 ($x < \frac{\ell}{3}$) のある断面を切断し、切断面よりも左の部分でつり合いをとると

$$\frac{2P}{3} - V = 0, \quad M - x \frac{2P}{3} = 0$$

となることから、せん断力と曲げモーメントは

$$V = \frac{2P}{3}, \quad M = \frac{2Px}{3}, \quad 0 < x < \frac{\ell}{3} \quad (e)$$

と求められる。これに対し、載荷点よりも右側で切断した場合には、例えば切断面よりも左の部分でつり合いをとると

$$\frac{2P}{3} - P - V = 0, \quad M - x \frac{2P}{3} + \left(x - \frac{\ell}{3}\right) P = 0$$

となるが、(計算ステップを少なくして間違いを避けるために) 図 2.33 の右端のように、切断面よりも右の部分でつり合いをとると

$$\frac{P}{3} + V = 0, \quad -M + (\ell - x) \frac{P}{3} = 0$$

であることから、断面力は

$$V = -\frac{P}{3}, \quad M = \frac{P}{3} (\ell - x), \quad \frac{\ell}{3} < x < \ell \quad (f)$$

と求められる。図 2.34 に結果を示した。単純支持端は回転自由なので曲げモーメントは零になる。またせん断力図の載荷点では、下向きの載荷荷重 P の大きさ分の下向きの不連続が発生する。またこの場合も、曲げモーメント図の傾きがせん断力図になっている。

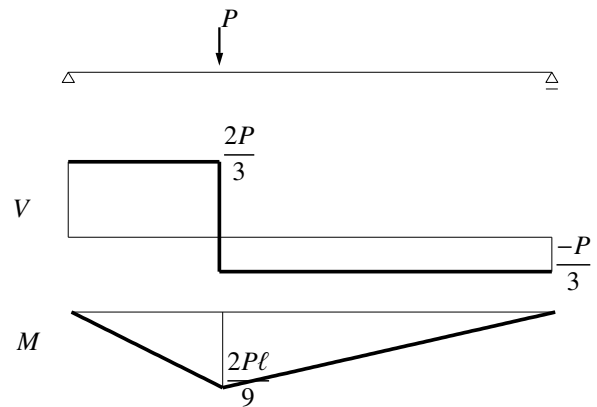


図 2.34 断面力図

非一様な分布荷重の場合：線形に分布した荷重が図 2.35 のように載っている場合を考えてみよう。この場合の分布荷重は $q(x) = q \frac{x}{\ell}$ で与えられている。まず反力を求めるために全体のつり合いを考えると

$$F_1 + F_2 + \int_0^\ell q(x) dx = 0, \quad \ell F_2 - \int_0^\ell x q(x) dx = 0$$

である。分布荷重は、三角形の重心位置である $x = \frac{2\ell}{3}$ に総力 ($\frac{q\ell}{2}$) が作用しているように考えて¹⁷もいい。上式を算定して反力を求めると

$$F_1 = \frac{q\ell}{6}, \quad F_2 = \frac{q\ell}{3}$$

となる。次に左から x の位置の断面を切断して、その切断面の左の部分でつり合いをとると

$$\frac{q\ell}{6} - V - \int_0^x q(\xi) d\xi = 0, \quad M - x \frac{q\ell}{6} + \int_0^x (x - \xi) q(\xi) d\xi = 0$$

となる。したがって、断面力は

$$V(x) = \frac{q}{6\ell} (\ell^2 - 3x^2), \quad M(x) = \frac{qx}{6\ell} (\ell^2 - x^2)$$

と求められる。結果¹⁸を図 2.36 に示した。

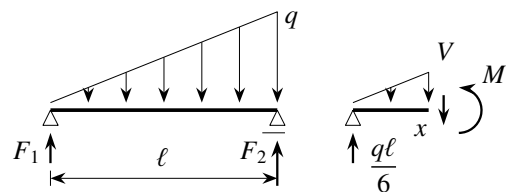


図 2.35 線形分布荷重

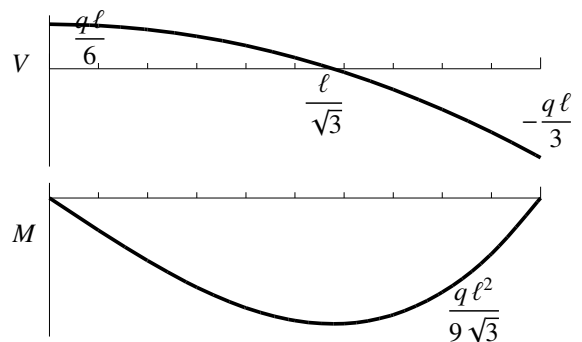


図 2.36 断面力図

¹⁷ 一般にはそういうことをせずちゃんと積分した方がいい。

¹⁸ 最近の学生さんには検算しない人が多いと聞かすが、例えばこの曲げモーメント図が右端でちゃんと零になるかどうか等を調べるのが望ましい。

軸力も同時に発生するような場合: とはいえ、ちょっと変な梁を対象としてみよう。一般に、トラスの弦材のように圧縮・引張で抵抗する部材を柱と呼び、曲げとせん断で抵抗する部材を梁と称するが、この両方を組み合わせた構造を骨組¹⁹と呼ぶ。骨組の場合は、部材同士はピンではなく剛結（溶接したような状態に）されている。例として図2.37を解くが、スパン中央とそこから斜めに立ち上がっている梁の下端も剛結されているものとする。

この構造に図示したような斜めの外力を載せた場合を対象として、これまでにやった切断法がそのまま使えることを示しておこう。まず図2.37のように反力を設定してつり合いをとると

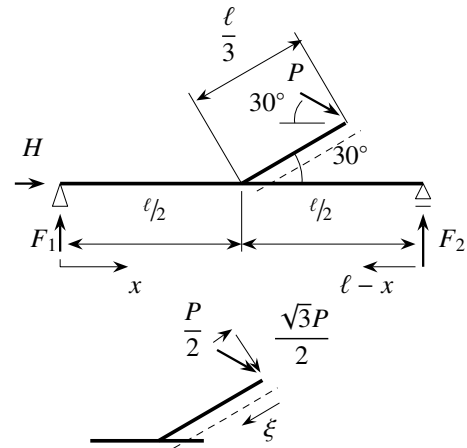


図 2.37 斜め外力を受ける単純梁

$$F_1 + F_2 - P \sin 30^\circ = 0, \quad H + P \sin 30^\circ = 0, \quad \ell F_2 - \frac{\ell}{3} \cos 30^\circ P \sin 30^\circ - \left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{3} \cos 30^\circ \right) P \sin 30^\circ = 0$$

である。モーメントは左端回りでとった。これより

$$F_1 = \frac{3-2\sqrt{3}}{12}P, \quad F_2 = \frac{3+2\sqrt{3}}{12}P, \quad H = -\frac{\sqrt{3}}{2}P$$

のように求められる。単純梁部分の左側は、図示していないが、左から x の位置に切断を入れて、せん断力と曲げモーメントに加えて、軸方向の軸力 N を断面の正方向（この場合は x 方向）に作用させてつり合いをとることによって

$$N(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}P, \quad V(x) = \frac{3-2\sqrt{3}}{12}P, \quad M(x) = \frac{3-2\sqrt{3}}{12}Px$$

となる。同様に、右側は右端から $(\ell - x)$ の位置に切断を入れ

$$N(x) = 0, \quad V(x) = -\frac{3+2\sqrt{3}}{12}P, \quad M(x) = \frac{3+2\sqrt{3}}{12}P(\ell - x)$$

と求められる。最後に中央から右上に張り出した梁部分は、図2.37の下段の図のように梁の軸線方向と直角方向に外力 P を分解した上で、先端から左斜め下向きに ξ 軸を取り、断面を切断してつり合いを考えれば

$$N(x) = \frac{1}{2}P, \quad V(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}P, \quad M(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}P\xi$$

となる。図2.37に破線を付けた側が正の曲げモーメント図（負のせん断力図）側になるように設定していることに注意して欲しい。この結果を示したのが図2.38であるが、せん断力図と曲げモーメント図に加えて一番左に軸力図も示した。

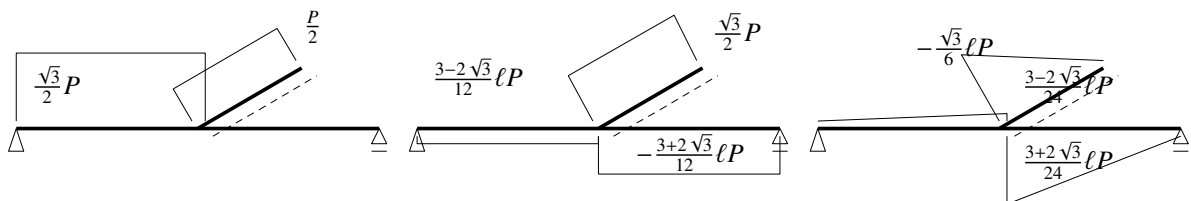


図 2.38 軸力図・せん断力図・曲げモーメント図

¹⁹ あるいはラーメン（もちろんドイツ語である）と呼ぶ。梁断面の幅「 b 」もドイツ語（Breite）かららしい。

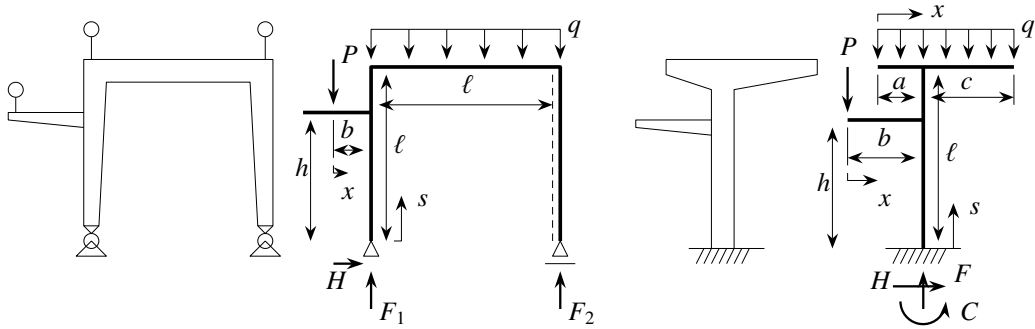


図 2.39 骨組の例

もう一つ、もっと骨組らしい構造を対象としてみよう。例として図 2.39 の左側の構造を解こう。これは高架の高速道路の柱に、アクセスランプのための梁を張り出したものを、ちょっと乱暴だが静定系でモデル化したものである。反力を求めるために全体のつり合いをとると

$$H = 0, \quad F_1 + F_2 - P - q\ell = 0, \quad bP + \ell F_2 - \frac{\ell}{2} q\ell = 0$$

であるから、反力は

$$H = 0, \quad F_1 = \frac{q\ell}{2} + \frac{(\ell + b)P}{\ell}, \quad F_2 = \frac{q\ell}{2} - \frac{bP}{\ell}$$

と求められる。

s 軸は左の柱の基部から右の柱の基部までの軸線に沿った座標とする。したがって、 $0 < s < \ell$ が左の柱部、 $\ell < s < 2\ell$ が上の梁部、 $2\ell < s < 3\ell$ が右の柱部に相当する。また張り出し梁は载荷点から右向きに x 軸をとった。というのも、それよりも左には断面力は何も生じないからである。張り出し部は片持ち梁と同じなので、簡単に

$$N(x) = 0, \quad V(x) = -P, \quad M(x) = -Px, \quad 0 < x < b$$

となる。次に左の柱の張り出し部までは、やはり断面を切断してつり合いをとると

$$N(s) = -\frac{q\ell}{2} - \frac{(\ell + b)P}{\ell}, \quad V(s) = 0, \quad M(s) = 0, \quad 0 < s < h$$

と求められる。その上の部分では、張り出し部の荷重を考慮すればいいだけなので

$$N(s) = -\frac{q\ell}{2} - \frac{bP}{\ell}, \quad V(s) = 0, \quad M(s) = -bP, \quad h < s < \ell$$

である。次に梁の部分についても同様の切断をすれば、つり合いから

$$N(s) = 0, \quad V(s) = \frac{q\ell}{2} + \frac{bP}{\ell} - q(s - \ell), \quad M(s) = -Pb + \left(\frac{q\ell}{2} + \frac{bP}{\ell}\right)(s - \ell) - \frac{1}{2}q(s - \ell)^2, \quad \ell < s < 2\ell$$

と求めることができる。右の柱は基部から考えた方が簡単で、最終的に

$$N(s) = -\frac{q\ell}{2} + \frac{bP}{\ell}, \quad V(s) = 0, \quad M(s) = 0, \quad 2\ell < s < 3\ell$$

と求められる。断面力図は省略する。

(4) ゲルバー梁

実際の橋梁の中には、支点間に桁が一つしか無い単径間形式だけではなく、複数の橋脚の上を渡しているように見えるものもある。もし複数の径間を連続して渡した梁にすると、実は後述する不静定構造になり、ここまでの知識では断面力を求めることはできない。



図 2.40 ゲルバー形式の梁（牛越橋のような 5 径間の場合）

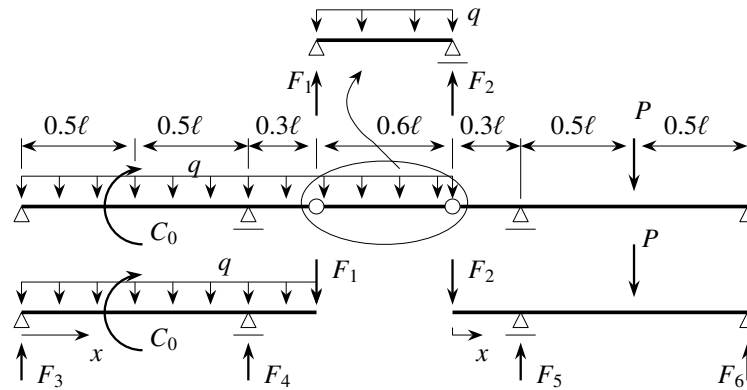


図 2.41 ゲルバー梁の例

さて、例えば第 1.1 節で取り上げた牛越橋は 5 径間の橋で、橋脚の上を見ると連続しているように見える。しかし、もっとよく観察するとゲルバー形式の橋梁であり静定系であることがわかる。それを簡単な図にしたのが図 2.40 である。左右から二つ目と三つ目の橋脚の間にある小さい桁は写真 2.5 のようにして隣の桁に支えられている。この写真はちょうど図 2.40 の点 A の位置の様子を示している。写真にある奥の主桁の赤い楕円で囲んだ部分に隙間が空いているのがわかる。つまりここで二つの梁は縁を切って²⁰あって、この写真の場合は、右の桁が左の桁に支えられていることが確認できる。設計の場合は、この図 2.40 の下の図のように、ヒンジでモデル化することが多いが、実際にはこの写真のようにして支えられている。

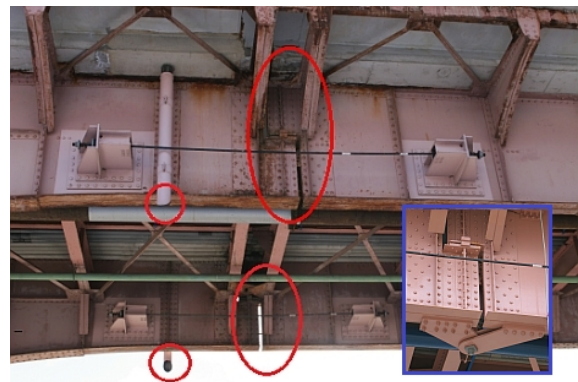


写真 2.5 掛け違い部 — 右の桁が左の桁に乗っている
青枠はあの大地震後に下フランジに設置されたずれ止め

では図 2.41 の 3 径間のゲルバー梁を解いてみよう。 C_0 は集中外力モーメントである。まず、中央部で支えられた単純梁区間（楕円で囲んだ部分）は、上方の図のような等分布荷重を受ける単純梁なので、演習問題 2-3 の問題 4 の解答（自分でまず求めること）で答は求められている。左右のスパンを解くために必要なのは両端の反力 F_1, F_2 であるが、これも簡単に $F_1 = F_2 = 0.3ql$ と求められる。したがって、左端から x 軸を定義すると、この中央部の断面力が

$$V(x) = 0.3ql - qx, \quad M(x) = 0.3qlx - \frac{1}{2}qx^2$$

となる。これが求められたあとは、左右の張り出しスパンまでの区間をそれぞれ、左下および右下の図のような別々な系として解けばいいだけである。

²⁰ 縁が切ってある部分に緩んだケーブルが見えるが、これは落橋防止装置である。赤丸の排水管下端の切り方の向きにも注目。牛越橋の下流側二つ目の隣の瀬橋では旧橋を一部分に流用してあり、そこがゲルバー形式だったのだが、2010 年頃にヒンジが固定された上で補強（写真 J.7 参照）され、連続桁に変更された。美しい構造形式であったが、耐久性・耐震性のために止むを得ず変更されてしまったようだ。少し残念だ。牛越橋も 2011 年のあの大地震に耐えたが、そのあと補強（写真 2.5）された。

まず左側の系の支点反力は、力のつり合いとモーメントのつり合い条件から

$$F_3 = 0.365 q\ell - \frac{C_0}{\ell}, \quad F_4 = 1.235 q\ell + \frac{C_0}{\ell}$$

となる。そこで、左端から x 軸を定義して左から順に解いてみると、まず $0 < x < 0.5\ell$ の間は

$$V(x) = \left(0.365 q\ell - \frac{C_0}{\ell}\right) - qx, \quad M(x) = \left(0.365 q\ell - \frac{C_0}{\ell}\right)x - \frac{1}{2}qx^2$$

と求められる。さらに $0.5\ell < x < \ell$ までの間は

$$V(x) = \left(0.365 q\ell - \frac{C_0}{\ell}\right) - qx, \quad M(x) = C_0 + \left(0.365 q\ell - \frac{C_0}{\ell}\right)x - \frac{1}{2}qx^2$$

である。最後に張り出し部の $\ell < x < 1.3\ell$ の区間は

$$V(x) = 0.3 q\ell + (1.3\ell - x)q, \quad M(x) = -(1.3\ell - x)0.3 q\ell - \frac{1}{2}(1.3\ell - x)^2 q$$

と求められる。

次に右側の部分は、まず反力が

$$F_5 = \frac{1}{2}P + 0.39 q\ell, \quad F_6 = \frac{1}{2}P - 0.09 q\ell$$

と求められる。左端から x 軸をとり、順に左から解くと、 $0 < x < 0.3\ell$ では

$$V(x) = -0.3 q\ell, \quad M(x) = -0.3 q\ell x$$

となる。次に $0.3\ell < x < 0.8\ell$ では

$$V(x) = \frac{1}{2}P + 0.09 q\ell,$$

$$M(x) = -0.15 P\ell - 0.117 q\ell^2 + \left(\frac{1}{2}P + 0.09 q\ell\right)x$$

であり、 $0.8\ell < x < 1.3\ell$ の区間では

$$V(x) = -\frac{1}{2}P + 0.09 q\ell, \quad M(x) = (1.3\ell - x)\left(\frac{1}{2}P - 0.09 q\ell\right)$$

と求められる。各自計算してみたい。図 2.42 に分布図を示したが、それぞれの値は

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{C_0}{\ell} + 0.365 q\ell, & V_2 &= -\frac{C_0}{\ell} - 0.635 q\ell, & V_3 &= 0.6 q\ell, & V_4 &= -0.3 q\ell, \\ V_5 &= \frac{P}{2} + 0.09 q\ell, & V_6 &= -\frac{P}{2} + 0.09 q\ell, & M_1 &= -\frac{C_0}{2} + 0.0606 q\ell^2, & M_2 &= \frac{C_0}{2} + 0.0606 q\ell^2, \\ M_3 &= -0.135 q\ell^2, & M_4 &= -0.09 q\ell^2, & M_5 &= \frac{P\ell}{4} - 0.045 q\ell^2 \end{aligned}$$

である。ヒンジの部分で曲げモーメントが零になっていることに注意すること。

数値的に近似解を求める手法を第 5 章で説明するが、その方法を用いてまっすぐな梁を解くために著者が作成したプログラムも電子的に入手可能になっている。図 2.42 のような図の値もパーソナルコンピュータ上で設定して求めることができる。スパン途中にヒンジやバネ支持も挿入できるが、入手方法についてはまえがきを参照のこと。ただし、つり合い式を解く練習をするためには是非文献 [145] 等で多くの問題を解いて欲しい。

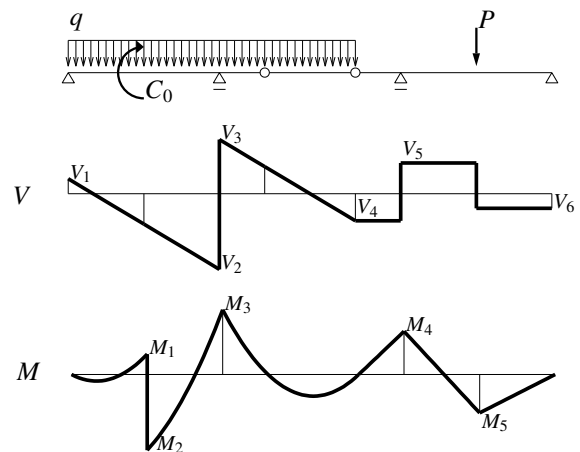


図 2.42 ゲルバー梁の断面力図

演習問題 2-3

3. 左端固定の片持ち梁に線形分布の荷重 $q(x) = q \frac{\ell - x}{\ell}$ が作用したときの断面力図を求めよ。
4. 等分布荷重 $q = \text{const.}$ が作用した単純梁の断面力図を求めよ。
5. 図 2.37 の連結点における断面力同士のつり合いを確認せよ。
6. 図 2.39 の左側の図の結果を確認せよ。
7. 図 2.39 の右側の図も高架橋の脚のモデルである。断面力分布を求めよ。

2.3.3 梁の中の応力分布と断面係数

トラスについての第 2.2.3 (4) 節では、設計に必要な物理量は断面の強度、つまり断面が持つ抵抗力・応力だと述べた。その細長いトラスの第 k パネルの左端に近い部分を抜き出したのが図 2.43 である。p.28 の式 (*) で求めたように、まず上弦材は $(k - 1)P$ の引張の軸力が生じているが、例えば I 形をした断面には、この図に描いたように、一様に分布する単位面積当たりの応力（抵抗力；内力）が生じている。また斜材も一様な引張応力が生じ、下弦材は圧縮なので、例えば箱形断面の場合であっても図のように、やはり一様な圧縮応力が生じて抵抗している。そのため、第 2.2.3 (4) 節で考えたように、その一様な応力（抵抗力）がその材料固有の強度を超えないように断面積を設計すれば、強く安全な構造が設計できるということを学んだ。

梁の断面の設計の場合もほぼ同様はずだが、そのためにはまず梁の断面に生じている応力分布を知る必要がある。そこで再度細長いトラスの例を用いてみよう。図 2.43 のように、上弦材には合計で $(k - 1)P$ の引張の軸力が生じている一方で、下弦材にはやはり一様な応力で kP の圧縮軸力（ $-kP$ の負の引張軸力）が、そして斜材の x 方向には P の引張軸力が生じている。したがって、下弦材に近い下方部分では、下弦材と斜材の軸力の合計で $(k - 1)P$ の圧縮軸力（ $-(k - 1)P$ の引張軸力）が生じていると考えてい

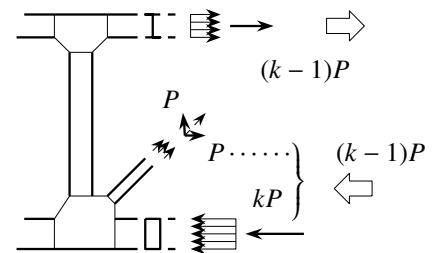


図 2.43 トラスの上下端の内力

ろう。これはちょうど上弦材の引張軸力と同じ大ききで符号だけが異なる。つまり、遠くから眺めたときのトラスの切断面全体を梁の断面として捉えたときには、梁の上端と下端には同じ大ききの内力・応力が逆向きに（圧縮と引張の逆符号で）生じていると考えるのは、素直ではないだろうか。

このことから、梁の中には軸線（ x 軸）を境に逆向きの内力が生じることによって、曲げモーメントという抵抗力を発生させていることが想像できる。それを示したのが図 2.44 である。果たして直線的に分布するかどうかは、今の段階では理解できなくていい。その詳細については第 4 章で説明する。ここでは、第 1 次近似として直線的に応力が分布して生じていると考えておいて欲しい。このような応力分布の合計が、断面全体の抵抗力としての曲げモーメントになっているのだから

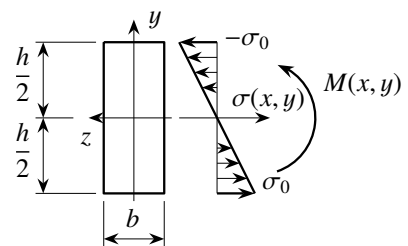


図 2.44 梁の中の応力分布

$$M(x) = \int_{\text{断面の下端}}^{\text{上端}} -y \sigma(x, y) dA, \quad \sigma(x, y) = -\frac{2 \sigma_0(x) y}{h}$$

という関係にあることは容易に理解できると思う。A は断面積である。反時計回りのモーメントを正としているので、上述のトラスの場合とは圧縮・引張が逆になっており、さらに σ の作用線までの距離を $(-y)$ としている。図のように断面が高さ h で幅 b の長方形だとすると $dA = b dy$ になるので、積分すると

$$M(x) = \int_{-h/2}^{h/2} -y \sigma(x, y) b dy = \frac{2 \sigma_0(x) b}{h} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{b h^2}{6} \sigma_0(x)$$

となる。したがって、断面の上下縁に発生する最大応力 σ_0 と生じている曲げモーメント M との間には

$$M(x) = W\sigma_0(x), \quad W \equiv \frac{2}{h} \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy = \frac{bh^2}{6} \quad (2 \text{ 軸対称断面}) \quad (2.10a, b)$$

という関係が成立する。この W は断面係数と呼ばれるもので、断面の形と寸法だけで決まる量である。すなわち、トラスのように断面内の応力分布が一樣な場合に設計対象となる断面の幾何学的な抵抗係数は断面積 A ($N = A\sigma_0$) であったのに対し、梁の曲げの場合に設計しなければならない幾何学的な抵抗係数は断面係数 W ($M = W\sigma_0$) になるというわけだ。この断面係数を大きくすれば梁の曲げ強度を大きくできるからだ。つまり、ある設計荷重に対して設計したい断面に生じる最大の曲げモーメント M_{MAX} による上下縁の応力 σ_0 が、材料そのものの強度である応力 $\sigma^{(b)}$ よりも小さくなるように設計すればいいので、式 (2.10a) を用いて

$$\sigma_0 = \frac{|M_{\text{MAX}}|}{W} \leq \sigma^{(b)} \quad \rightarrow \quad W \geq \frac{|M_{\text{MAX}}|}{\sigma^{(b)}}$$

になるように断面を決めればいいことになる。これが、トラスを設計する場合の式 (2.6) 等に対応した、梁の場合の設計条件になる。あとは上式の最大曲げモーメント M_{MAX} を求める方法がわかればいいが、それは次節で説明しよう。なお、ここでは y, z の 2 軸に対して対称な断面形状の場合に限定した断面係数の定義を示していることに注意して欲しい。任意の断面形の場合は第 4 章で説明する。

2.3.4 影響線と断面設計

(1) 影響線

前節の M_{MAX} を求めるためにはトラスの場合と同様、設計しようとする断面に生じる断面力の影響線を事前に求めておかなければならない。しかし梁の場合は、その長手方向に一樣ではない断面力が生じるため、どここの断面を設計対象とすべきかというステップが最初に加わってくるので注意して欲しい。例として図 2.45 の単純プレートガーダを対象としよう。この左側の図の一番上にあるのはそのプレートガーダの左半分の模式図であるが、合理的な（もしかしたら経済的な）断面にするために、スパン中央区間とその外側区間を異なる断面で設計し、図の断面 A で接合することにしよう。具体的なスパンの様子はその下に示したが、断面 A と A' が接合箇所、中央区間とその外側で断面のフランジ寸法等が異なるように設計しようとしている。

ここでは支点到近い方の桁 (B-A 区間) の断面を設計することを想定して、まず断面 A に着目して設計してみよう。左端から x の位置に単位集中荷重 (単位は無い) を載せた場合の断面 A の曲げモーメントとせん断力は、この断面 A の曲げモーメントとせん断力の影響線と呼ばれる。曲げモーメント図等を求めるときと同じ手順に従うものの、載荷位置 x 毎にまず反力を求めて断面法で A 点の曲げモーメントとせん断力を求めれば影響線が求められる。ここをサラッと読んではいけない。載荷位置 x が変わる毎に支点反力も変化し、また断面 A と x の位置関係によっては曲げモーメントとせん断力の求め方が違って来る等、かなり面倒な作業²¹であることがわかるだろうか。この例の場合はその結果、単位を m とした場合に、曲げモーメントの影響線 \bar{M}_A (単位は m) と、せん断力の影響線 \bar{V}_A (単位は無い) は

$$\bar{M}_A = \begin{cases} \frac{5x}{7}, & 0 < x < 10 \text{ m} \\ \frac{2(35-x)}{7}, & 10 \text{ m} < x < 35 \text{ m} \end{cases}, \quad \bar{V}_A = \begin{cases} -\frac{x}{35}, & 0 < x < 10 \text{ m} \\ \frac{35-x}{35}, & 10 \text{ m} < x < 35 \text{ m} \end{cases} \quad (g, h)$$

となるので各自求めて欲しい。図 2.45 の左下にこの \bar{M}_A と \bar{V}_A を描いておいた。ここで、図 2.34 のせん断力図や曲げモーメント図との違いには十分注意すること。影響線の横軸は単位荷重の作用位置であり、この図は断

²¹ 第 4.5.4 節で導入する相反定理を用いると載荷位置を動かさなくてもいいのだが、まずは正攻法で各自求めて欲しい。

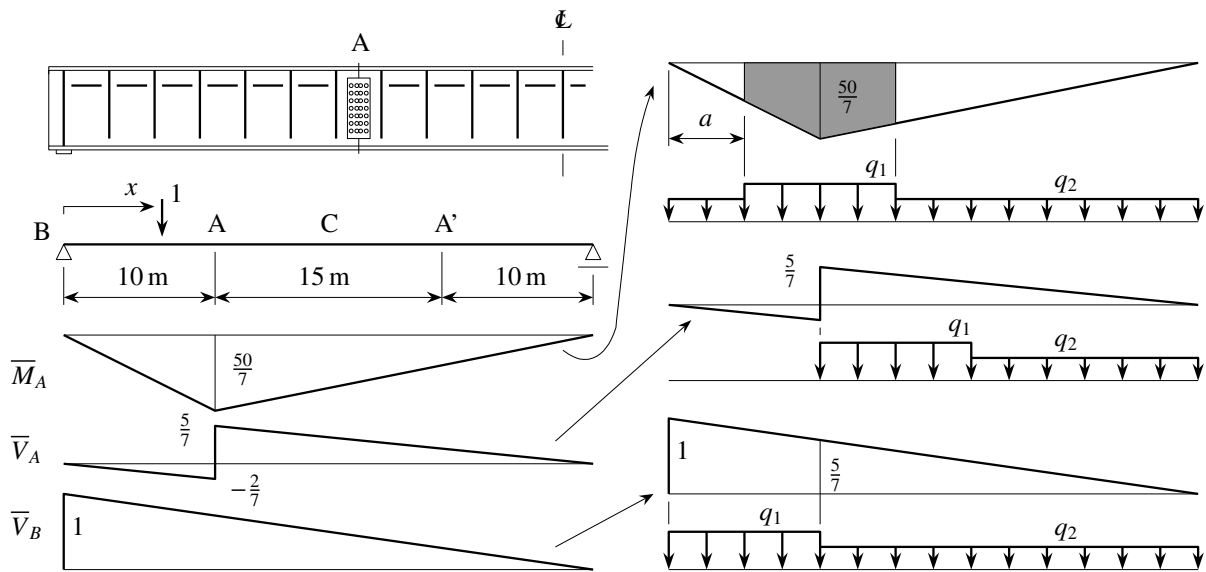


図 2.45 変断面のプレートガーダの設計

面 A に生じている曲げモーメントとせん断力の大きさを示しているからだ。さて、トラスの場合と同様にしてこの影響線を用いれば、断面 A あるいは設計しようとしている左右の支点上に近い方の桁が最も不利に（辛く）なるような載荷位置を決定できる。そのときに着目断面に生じている M_{MAX} 等の最大の断面力に対して安全になるように設計すればいいわけだ。

(2) 最大せん断力と最大曲げモーメント

ここではまず曲げモーメント抵抗に対してこの左右の区間を設計しよう。トラスの場合と同様、分布外力 q_1 と q_2 の値の求め方については第 J.5.3 節に示してあるので、ここでは割愛する。単純梁の場合、荷重がどこに載ろうと支点上では常に曲げモーメントは零なので、この左右区間の場合は、できるだけ支点上から遠い断面で曲げ抵抗の安全を確保すべきであることは予想できると思う。したがってこの例の場合は断面 A を設計断面とすればいいので、その曲げモーメントの影響線 \bar{M}_A を用いて載荷位置を決めよう。図 2.45 の左側に示したように、式 (g) は三角形分布の \bar{M}_A になるので、右側の図の上段に示したように、ある $x = a$ の位置から $D = 10\text{m}$ の区間に大きめの荷重 q_1 を載せ、断面 A が最も不利になるように位置 a を決めればいい。したがって網掛けした部分の影響線面積 A_g （単位は m^2 ）を求めた上で、それが最大になるような位置 a は

$$A_g = \frac{250}{2} - \frac{5}{14}a^2 - \frac{1}{7}(25-a)^2, \quad \frac{dA_g}{da} = 0 \rightarrow a = \frac{50}{7}$$

となるので、左から 7.1m の位置から 10m の区間に q_1 を載荷し、残りの部分全体に q_2 を載せたときに、断面 A は最も辛い（危険な）状況になることがわかる。このとき網掛けした影響線面積は $\frac{3000}{49}\text{m}^2$ であり、網掛けしていない部分の影響線面積が $\frac{3125}{49}\text{m}^2$ と算定できる。したがって断面 A の最大曲げモーメントは

$$M_{\text{MAX}} = q_1 \frac{3000}{49} + q_2 \frac{3125}{49} \quad (\text{単位は N}\cdot\text{m}) \quad (i)$$

と求められる。

次にせん断抵抗に対する設計をしよう。断面 A のせん断力の影響線 \bar{V}_A は図 2.45 に示した通りであるが、実はせん断力は、断面 A よりも支点上の断面 B の方が厳しい状況になっていることに注意しなければならないのである。図 2.45 の左側の下段に断面 B のせん断力の影響線 \bar{V}_B も描いておいた。この影響線面積の方が、その

上の断面 A のせん断力の影響線面積（正負の二つ）よりも大きいことに気付いて欲しい。したがって、左右区間のせん断抵抗に対する設計の場合には、断面 B の影響線の方を用いなければならないことになる。つまり図の右側の下段に示したように、この場合は左に寄せて大きめの荷重を載せればよい。曲げ抵抗の場合と同様の影響線面積（単位は m）の算定をすると、 q_2 が載った区間の面積が $\frac{125}{14}$ で q_1 が載った区間の面積が $\frac{60}{7}$ になるので、断面 B の最大せん断力が

$$V_{\text{MAX}} = q_1 \frac{60}{7} + q_2 \frac{125}{14} \quad (\text{単位は N}) \quad (j)$$

と求められる。左右区間の梁はこの M_{MAX} と V_{MAX} に対して安全であるように設計されなければならない。このように、一つの部材（区間）を設計するとき、最大曲げモーメントと最大せん断力は異なる断面に着目して異なる荷荷条件の下で求められていることには十分注意して欲しい。

(3) 断面の強度と設計

曲げ強度の確保: トラスのときと同様、曲げを受ける場合も引張強度と圧縮強度をそれぞれ $\sigma_a^{(bt)}$, $\sigma_a^{(bc)}$ とすると、引張側と圧縮側の断面の曲げ強度は式 (2.10) からそれぞれ $W \sigma_a^{(bt)}$, $W \sigma_a^{(bc)}$ となるので、安全が確保されるためには上式 (i) の最大曲げモーメントに対して

$$W \sigma_a^{(bt)} \geq |M_{\text{MAX}}|, \quad W \sigma_a^{(bc)} \geq |M_{\text{MAX}}|$$

を満足しなければならない。これから断面は

$$W \geq \frac{|M_{\text{MAX}}|}{\sigma_a^{(bt)}}, \quad W \geq \frac{|M_{\text{MAX}}|}{\sigma_a^{(bc)}} \quad (2 \text{ 軸対称断面}) \quad (2.11a, b)$$

を満足するように断面の形や寸法が設計されなければならない。ここでも材料強度が圧縮と引張で異なるのは奇妙に感じられるかもしれないが、曲げを受ける場合も材料によっては、あるいは第 7 章で説明する座屈現象のために、圧縮と引張で強度が異なる（第 7.7.3 節の式 (7.99) (7.102) 参照）こともあるので、このような 2 重の確認が必要になるのだ。

せん断強度の確保: また同時に、最大せん断力を支えられるように、せん断強度に対して断面は設計されていなければならない。まず応力で与えられる許容せん断応力（せん断強度）は、後述の式 (3.109) を根拠にして

$$\tau_a = \frac{\sigma_a^{(t)}}{\sqrt{3}}$$

で与えられている。あとはせん断力とせん断応力の関係、つまり、断面の抵抗係数を知る必要があるが、これは少々難しい。詳細は第 4.6.1 節で説明するが、せん断力の場合は軸力と同様、何らかの断面積が近似的な抵抗係数になっていると考えることが多い。その「せん断抵抗断面積」を A_s とすると、トラスの設計と同様、せん断に対して安全を確保するためには、式 (j) の最大せん断力に対して A_s が

$$\tau_a A_s \geq |V_{\text{MAX}}| \quad \rightarrow \quad A_s \geq \frac{|V_{\text{MAX}}|}{\tau_a} \quad (2.12)$$

を満足するように断面の形や寸法を決定すれば、安全な設計ができたことになる。例えば I 形断面のような場合はウェブの部分だけの断面積を A_s として用いている。

「断面の？」強度： さて第1.1節では、長方形断面のようなものよりI形のような断面の方が力学的に効果的であると述べた。そこで、トラスの断面積比例という抵抗則との対比も念頭に置いて、長方形のときと断面積は同じ（トラス的な強度は同じ）で形状がI形になるようにした場合（フランジが厚過ぎて決して通常のI形断面とは言えないが）の断面係数の特徴を調べておこう。例えば図2.46のようなI形断面の断面積は図2.44の $b \times h$ の長方形の断面積と同じである。そこで図示したように、生じた応力の最大値が σ_1 になったとすると、応力分布は x の位置にある断面で

$$\sigma(x, y) = -\frac{6y}{5h} \sigma_1(x)$$

であるから、曲げモーメントはその定義から

$$M(x) = \int_{\text{断面の下端}}^{\text{上端}} \frac{6y^2}{5h} \sigma_1(x) b(y) dy$$

となる。 $b(y)$ は $|y| < h/2$ では $b/3$ 、 $|y| > h/2$ では b である。これを積分すると

$$M(x) = \frac{6\sigma_1(x)}{5h} \left\{ \frac{b}{3} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy + b \int_{h/2}^{5h/6} y^2 dy + b \int_{-5h/6}^{-h/2} y^2 dy \right\} = \frac{107bh^2}{270} \sigma_1(x)$$

と求められる。つまり

$$M(x) = W_1 \sigma_1(x), \quad W_1 \equiv \int_{\text{断面の下端}}^{\text{上端}} \frac{6y^2}{5h} b(y) dy = \frac{107bh^2}{270}$$

という関係になる。式(2.11)を念頭に置けば、より強い曲げ部材を作るためには断面係数 W を大きくすればいいことがわかる。したがって、長方形のときの断面係数式(2.10)とI形断面の W_1 を比較すると $\frac{W_1}{W(\text{長方形})} = \frac{107/270}{1/6} = \frac{107}{45} \approx 2.4$ となることから、同じ断面積（コストあるいは軸力に対する性能はほぼ同じ）なのに、曲げに対してはこのI形断面の方が2.4倍強い構造になっていることがわかる。なお、ここでも y, z の2軸に対して対称な断面形状の場合に限定した断面係数の定義を用いていることには注意して欲しい。任意の断面形の場合は第4章で説明する理屈を参照して欲しい。多分多くの読者が「断面が強度を持つのか？」と素直に感じていると思うが、上述のような状況を先輩達が簡単のために「断面の強度」と称してきたのである。

演習問題 2-4

8. 式(i)(j)と対応する影響線を求めてみよ。
9. 同じプレートガーダの中央スパンの中央断面Cの、曲げモーメントとせん断力の影響線を求めよ。
10. それと既に求めた影響線を用いて載荷位置を決定し、中央区間を設計する際の最大曲げモーメントと最大せん断力を求めよ。

2.3.5 微分方程式で表したつり合い式

(1) 局所的なつり合い式と境界条件

梁の二つの断面力であるせん断力と曲げモーメントは位置 x の関数になることがわかったと思う。多くの科学現象はある種の数理モデルで定式化され、それが予測（つまり工学における設計）に用いられるが、ほとん

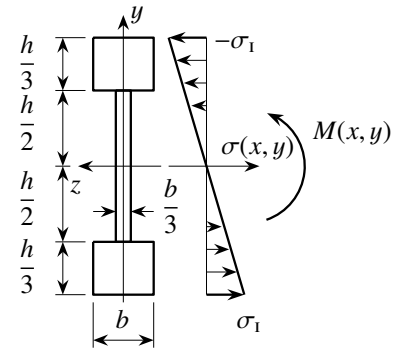


図 2.46 I 形断面 (?) の断面係数

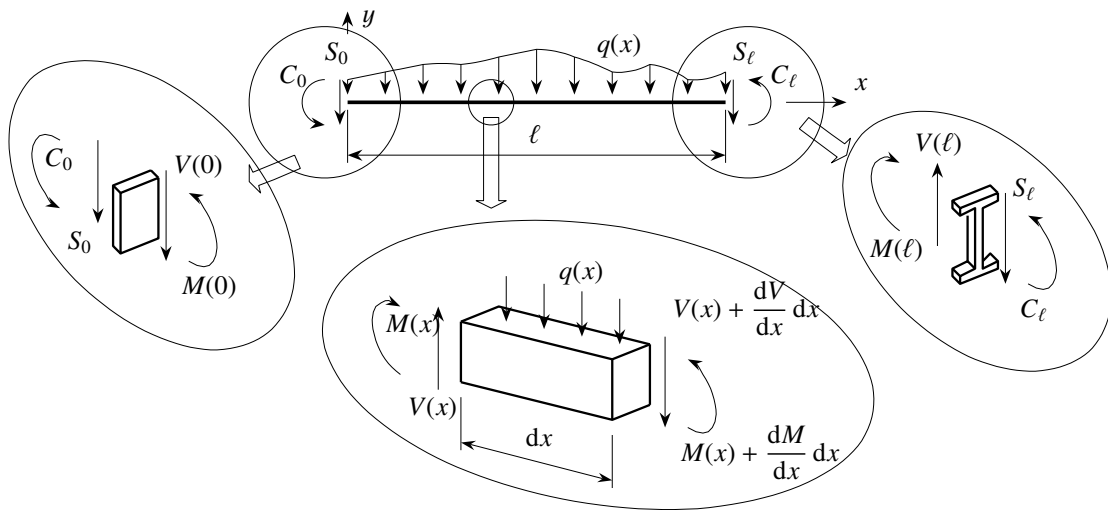


図 2.47 梁のつり合い微分方程式と境界条件

どの場合そのモデルは微分方程式で表される。つまり、せん断力と曲げモーメントという知りたい・予測したい関数が、力学原理としてある微分方程式を満足するものとしてモデル化される。前節までに用いてきたつり合い条件は、ある断面に生じた内力と外力の「巨視的な」つり合いであったが、ここでは「局所的な」、つまり物体中のある点 x の近傍のつり合い条件を考え、その考察から微分方程式で表されるつり合い式を求めておこう。構造力学を初めて学ぶ人の最初の難関が影響線だ。次に曲げモーメント。そしてその次が微分方程式で問題を解くというところだろう。特に「微分方程式を解く」という行為そのものと、「境界条件が解の特性を大きく左右する」ということになかなか慣れることができず、挫折しそうな難関の一つである。何をしているか理解できる（覚えるのではなく）まで、何度も復習して欲しい。

さて図 2.47 には、任意の関数で与えられた単位長さ当たりの分布荷重 $q(x)$ が作用している長さ ℓ の梁を描いた。両端はやや一般化して、どちらにも外力が作用しているように書いてあるが、もし端部が支えられている場合には、ここに描いた外力は反力だと解釈して欲しい。外力の向きは図 2.30 の定義に従った。まずつり合い式を求めるために、下の楕円の中に描いたように、任意の点 x から取り出した長さ dx の微分要素のつり合いを考えよう。まず y 方向の力のつり合いは

$$V(x) - \left\{ V(x) + \frac{dV(x)}{dx} dx \right\} - q(x) dx = 0$$

になる。この式を整理すると、結局 y 方向のつり合い式は

$$\frac{dV(x)}{dx} + q(x) = 0 \tag{2.13}$$

という微分方程式で表される。次にこの dx の右端を中心にした反時計回りのモーメントのつり合いをとると

$$\left\{ M(x) + \frac{dM(x)}{dx} dx \right\} - M(x) - dx V(x) + q(x) \frac{(dx)^2}{2} = 0$$

のようになる。分布荷重によるモーメントは、 dx が微分長さであることから、合計 $q dx$ の力が dx の中央に作用していると捉えて算定してある。この式も整理して dx の 1 次項（最重要項）だけを取り出すと、結局モーメントのつり合い式は

$$\frac{dM(x)}{dx} - V(x) = 0 \tag{2.14}$$

という微分方程式で表される。この式はどこかで見たという記憶は無いだろうか。そう、既に式 (2.9) で示したものと同じで、モーメント図の勾配がせん断力図になるということを示している。最終的に、式 (2.13) と式

(2.14) からせん断力 $V(x)$ を消去すれば、梁の断面 x におけるつり合いを表す局所的な微分方程式は

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + q(x) = 0, \quad \text{ただし} \quad V(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (2.15a, b)$$

のように、曲げモーメント $M(x)$ だけで表すことができ、せん断力 $V(x)$ は式 (2.15b) を用いて、求められた $M(x)$ を微分すれば得ることができる。

その微分方程式を解くとき、梁の場合は常微分方程式なので、積分する度に積分定数という未定定数が発生する。この定数を適切に決定できなければ、解が唯一に求められたことにはならない。梁の場合には、端部つまり境界の状況がこの定数を決定する。そのような境界の状況を与える条件を境界条件と呼んでいる。まず $x = 0$ の境界条件を求めるために、図 2.47 の左の楕円の中を見て欲しい。これは、長方形断面の梁として端部を薄く切り出したものだ。手前の見えている面は内部の断面なので、そこには二つの断面力を正しい符号で作用させてある。向こう側の面は外側の面で、外力が作用している面である。境界条件は、この薄い部分のつり合いから求められる。つまり、 y 方向の力のつり合いと、モーメントのつり合いから

$$-V(0) = -\frac{dM}{dx}(0) = S_0, \quad -M(0) = C_0 \quad (2.16a, b)$$

が、左端の境界条件式になる。同様に、図 2.47 の右側の楕円に描いた状況から、 $x = \ell$ の境界条件を求めよう。ここでは I 形断面をした梁を想定した図になっている。ここでも力とモーメントのつり合いから

$$V(\ell) = \frac{dM}{dx}(\ell) = S_\ell, \quad M(\ell) = C_\ell \quad (2.17a, b)$$

が、右端の境界条件式になる。このように、つり合い式も境界条件式も曲げモーメント $M(x)$ を未知関数として表すことができる。実際には構造が安定して動かないように端部は適切に支持あるいは固定されているものとする。静定構造の場合は結局式 (2.16) (2.17) の四つの境界条件のうちの一つが与えられる。式 (2.15a) が 2 階の常微分方程式なので二つの積分定数が必要になるが、その二つを端部の二つの境界条件で決定することによって唯一の解を得ることができるのである。

また、梁の中間部に集中せん断力や集中外力モーメントが作用している場合の条件のことも考えておこう。そこは端部ではないことから、連続条件と呼ばれることが多い。図 2.48 に示したのは、 $x = a$ に集中荷重が作用している状況である。境界条件の場合と同様、この载荷点を挟んで薄い断面を切り出し、そのつり合いを考える。载荷点の前後を区別するために、記号 $0 \leq \epsilon \rightarrow 0$ を付けてある。この薄片の力とモーメントのつり合いをとると

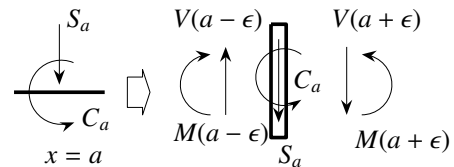


図 2.48 連続条件

$$V(a - \epsilon) - S_a - V(a + \epsilon) = 0, \quad M(a + \epsilon) + C_a - M(a - \epsilon) = 0$$

となる。式 (2.14) から $V = \frac{dM}{dx}$ なので、最終的な連続条件式も曲げモーメント $M(x)$ で表され

$$\frac{dM}{dx}(a - \epsilon) - \frac{\partial M}{\partial x}(a + \epsilon) = S_a, \quad M(a - \epsilon) - M(a + \epsilon) = C_a \quad 0 \leq \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.18a, b)$$

と求められる。連続条件を用いて積分定数を決めるやり方については次節の例を参照のこと。

(2) 境界値問題の例

等分布荷重の載った片持ち梁: 前節で求めたように静定梁の問題は、曲げモーメント $M(x)$ についての端部の力の境界条件式と梁の場所場所の微分方程式で表された力のつり合い式とで数理的にはモデル化されている。

このように記述された問題を境界値問題と呼んでいる。その問題の解き方の代表例として、図 2.31 に示した等分布荷重が作用した片持ち梁を解いてみよう。まずつり合い式と境界条件式は、式 (2.15a) (2.17) から

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + q = 0, \quad M(\ell) = 0, \quad V(\ell) = \frac{dM}{dx}(\ell) = 0$$

と表される。左端は外力が与えられていないから境界条件にはならない。 $q = \text{const.}$ だから、この微分方程式の一般解は

$$M(x) = -\frac{q x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

になるので、式 (2.15b) のせん断力と曲げモーメントの関係を考慮して、境界条件に代入すると

$$M(\ell) = 0 = -\frac{q \ell^2}{2} + c_1 \ell + c_2, \quad V(\ell) = \frac{dM}{dx}(\ell) = 0 = -q \ell + c_1$$

となる。したがって $c_1 = q \ell$, $c_2 = -\frac{q \ell^2}{2}$ と決定できる。これを上の $M(x)$ の表現に代入することによって

$$M(x) = -\frac{q x^2}{2} + q \ell x - \frac{q \ell^2}{2} = -\frac{q}{2} (\ell - x)^2, \quad V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = q(\ell - x)$$

と求められる。これは p.32 の式 (d) と一致する。求められた結果を $x = 0$ の境界条件式 (2.16) に代入すると

$$S_0 = -V(0) = -q \ell, \quad C_0 = -M(0) = \frac{q \ell^2}{2}$$

となり、左端の反力も正しく求められている。

非一様な分布荷重が載った単純梁: 次に、sine 関数で与えられた分布荷重 $q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$ が作用している単純梁を解いてみよう。 q_0 は分布荷重の最大値である。つり合い式と境界条件式は

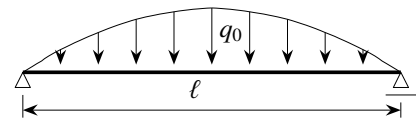


図 2.49 sine 関数分布荷重

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) = 0, \quad M(0) = 0, \quad M(\ell) = 0$$

と表される。境界条件は、両端がピン支承で支えられていることから曲げモーメントが両端で零となる。この場合の一般解は

$$M(x) = q_0 \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + c_1 x + c_2$$

と置いていいので、境界条件に代入した

$$M(0) = 0 = c_2, \quad M(\ell) = 0 = c_1 \ell + c_2$$

から $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ と求められる。したがって曲げモーメント分布は

$$M(x) = q_0 \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

となる。せん断力分布はこれを x で微分すれば求められ、両端の支点反力はそれを両端のせん断力の境界条件に代入して

$$S_0 = -\frac{q_0 \ell}{\pi}, \quad S_\ell = -\frac{q_0 \ell}{\pi}$$

と求められる。外力の総和が $\frac{2q_0 \ell}{\pi}$ であるから、上向きの力として正しく反力が求められていることがわかる。

集中荷重の載った単純梁: 最後に, スパン三分の一の位置に集中荷重が作用する単純梁 (p.32 の図 2.33) を解いてみよう。この場合は, $0 < x < \frac{\ell}{3}$, $\frac{\ell}{3} < x < \ell$ の両区間のつり合い式は $\frac{d^2 M}{dx^2} = 0$ だから, 一般解は両区間共に

$$M(x) = c_1 x + c_2, \quad 0 < x < \frac{\ell}{3}, \quad M(x) = c_3 x + c_4, \quad \frac{\ell}{3} < x < \ell \quad (k)$$

である。このように四つの積分定数が生じるが, 境界条件は

$$M(0) = 0, \quad M(\ell) = 0$$

の二つであり, 連続条件は式 (2.18) から $a = \frac{\ell}{3}$ として

$$\frac{dM}{dx}(a - \epsilon) - \frac{dM}{dx}(a + \epsilon) = P, \quad M(a - \epsilon) - M(a + \epsilon) = 0, \quad 0 \leq \epsilon \rightarrow 0$$

の二つで表されるため, この四つの条件から四つの積分定数を決定できる。以上の4条件式に上の二つの式で表された一般解を代入して整理すると

$$c_2 = 0, \quad c_3 \ell + c_4 = 0, \quad c_1 - c_3 = P, \quad c_1 \frac{\ell}{3} + c_2 - c_3 \frac{\ell}{3} - c_4 = 0$$

となるので, 第1式の $c_2 = 0$ を他の式に代入すれば

$$\begin{pmatrix} 0 & \ell & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \ell & -\ell & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix}$$

という連立方程式を解けばいいことになり, 結局

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\ell} \begin{pmatrix} 3 & 2\ell & 1 \\ 3 & -\ell & 1 \\ 0 & \ell^2 & -\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{P}{3\ell} \begin{pmatrix} 2\ell \\ -\ell \\ \ell^2 \end{pmatrix}$$

と求められるので, 曲げモーメント分布は

$$M(x) = \frac{2Px}{3}, \quad 0 < x < \frac{\ell}{3}, \quad M(x) = \frac{P(\ell - x)}{3}, \quad \frac{\ell}{3} < x < \ell$$

と求められる。これは p.33 辺りの式 (e) (f) と一致する。

演習問題 2-5

11. 微分方程式を用いて演習問題 2-3 の問題 3 と同じ問題を解け。
12. 右図 2.50 のようにスパン中央に集中外力モーメント Q を受ける単純梁を, 微分方程式を用いて解け。

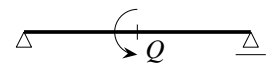


図 2.50 集中荷重を載せる

2.4 不静定とは?

2.4.1 トラス構造の安定性と不静定

写真 2.3 では, 四角いパネルでできたトラスが不安定であることを示した。しかし「安定性」には二通りの捉え方がある。一つは全体的な支持条件に関するもので, 反力の数によって決まるものだが, これは構造全体が動かないように支えられているかどうかに関わるものである。もちろん社会基盤構造としては動き続けるよ

うな構造物は役に立たないが、飛行中の航空機も構造物の一つではある。さてトラス構造の場合、支点反力の数を r とするとき

$$n_o \equiv r - 3 \quad (2.19)$$

によって定義される n_o を外的不静定次数と呼び、 $n_o < 0$ の場合が「外的不安定」、 $n_o = 0$ のときが「外的静定」、 $n_o > 0$ のときが「外的不静定」と呼ばれる。「(不)静定」の意味は今ではわからなくていい。

例えば、前節で扱った図 2.2 のトラスで検討しよう。この場合は反力は三つだったので、 $n_o = 0$ となり外的静定である。ここでもし、右側の支点も左右には移動できないようにできたとしよう。すると A と B を結ぶ長さ l の水平な部材は両端を地盤に固定されてしまっているの、その部材の存在そのものに意味が無くなるが、反力は四つになるから $n_o = 1$ となり、これを外的不静定と呼んでいる。この場合は、建設が終了した時点で温度が上昇した場合、この水平な部材 AB は温度に伴って自由に伸びることを抑制されてしまい、外力が作用していない状態であっても圧縮力が生じてしまう。これも一般的には不都合であろう。しかも、四つの未知の反力に対し、外力と反力の力のつり合いとモーメントのつり合いとで三つの条件式しか無いことから、その反力を求めることができない。さてどうしたらいいだろう。

逆に図 2.2 のトラスで、もし左側の支点も左右に移動できるものとする、反力は 2 箇所の支点の上向きの F_1, F_2 の二つだけになるので、 $n_o = -1 < 0$ となり、外的不安定である。つまり、この三角トラスは左右方向には全く固定されていないため安定ではなく（静止してはいられなくなり）、運動方程式

$$Q = m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} \rightarrow u(t) = \frac{Q}{2m} t^2 + c_1 t + c_2$$

を満たす運動をすることが可能になる。ここに m はトラスの全質量、 $u(t)$ はトラス全体の x 方向の移動量である。したがって、短時間の何らかの外乱があれば（風が吹けば）、そのあとは x 方向に等加速度運動をすることになる。これは、この章の始めで「つり合い」の定義を示したときにも述べた。構造自体は外力を支えられるものの、自由に移動できるため、外的に不安定になっていると呼んでいる。

もう一つの「安定性」は内的安定性と呼ばれるもので、構造自体の安定性に関わったものである。こちらが写真 2.3 の四角形のトラスが自立しないことに関係している。部材の総数を q 、節点の総数を j とするとき

$$n_i = q + 3 - 2j \quad (2.20)$$

で定義される n_i を内的不静定次数と呼ぶ。 $n_i < 0$ の場合には「内的不安定」、 $n_i = 0$ の場合には「内的静定」、 $n_i > 0$ の場合には「内的不静定」と呼ばれる。例として写真 2.3 を表した図 2.51 (a) の左図にある四角形トラスを眺めてみよう。この構造に横方向から荷重を作用させるとそのすぐ右の図のように潰れてしまうことから、不安定なのは明らかであるが、この構造は $q = 4$ 、 $j = 4$ なので果たして $n_i = -1 < 0$ である。つまり、支持が適切になされていても、構造自体が不安定なものを内的不安定な構造と呼んでいる。一方図 2.51 (b) のように部材を一つ増やし、二つの三角形からなる構造の場合には、 $q = 5$ なので $n_i = 0$ となる。したがって、荷重を作用させても潰れることなく三角形の形状は保たれる。これを「内的静定」と呼んでいる。さらに図 2.51 (c) のようにもう 1 本部材を増やした場合には $q = 6$ となることから $n_i = 1 > 0$ になり、内的不静定と呼ばれる構造になる。ただし、内的不静定な構造は安定で、内的静定な構造よりもある意味で余裕がある（冗長である）。つまり、図 2.51 (c) の構造から部材を一つ取り外した（壊れた）としても、それは内的静定になるだけで全体構造は壊れないからだ。ということは、最後の例の内的不静定な構造が持つ冗長性

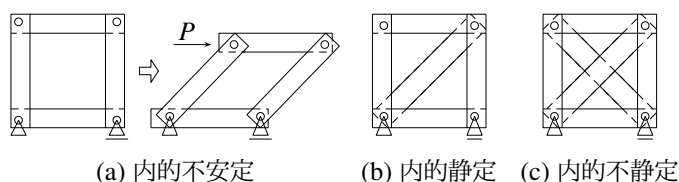


図 2.51 トラスの内的不安定性

には耐震構造等を考える場合には特に重要な意味があるのだ。それは、発生する確率が非常に小さい何らかの作用で1本の部材が万一破断しても、構造全体はまだ安定のままでいられるからである。

この章の最後で説明するが、「内的安定性」を「外的安定性」と同様に力との関係で捉えるならば、内力を力のつり合いのみで求められる場合を「(内的)静定」、そうでない場合を「(内的)不静定」と呼んでいることになる。外的不静定次数と内的不静定次数との和

$$n \equiv n_o + n_i = q + r - 2j \quad (2.21)$$

で表される n をトラスの不静定次数と呼ぶことがある。例えば、図 2.51 (c) の構造が図 2.51 (a) のように载荷された図 2.52 の構造の軸力を求めてみよう。 $q = 6$, $j = 4$ なので $n_i = 1$ となり 1 次の不静定構造である。外的には静定なので、反力は $H = -P$, $F_1 = -P$, $F_2 = P$ のように求められる。部材には 1 から 6 の数字を付けて各軸力を N_i ($i = 1 \sim 6$) とする。節点法で軸力を求めようとする

$$\begin{array}{ll} \text{A:} & N_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_2 = P, \quad N_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_2 = P, \\ \text{B:} & N_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_5 = -P, \quad N_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_5 = 0, \\ \text{C:} & N_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_2 = 0, \quad N_6 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_2 = 0, \\ \text{D:} & N_6 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_5 = -P, \quad N_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_5 = 0 \end{array}$$

となる。右辺が零になっている四つの式から

$$N_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_5, \quad N_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_5, \quad N_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_2, \quad N_6 = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_2$$

という関係を得るので、これを残りの四つの式に代入すると、実はすべての式が同じ式

$$N_2 - N_5 = \sqrt{2} P$$

になってしまい、条件式が一つ足りず軸力を唯一には求めることができない。これが「不静定構造」が持つ特徴なのだ。さてどうしたらいいだろう。

ところで、図 2.53 の一番左側に示したように、部材で閉じていないパネルが存在する場合の内的不静定次数が $n_i = -1$ になることの解釈の仕方はよくわからない。どこが「不安定」なのだろう。それはともかく、この図に示した 3 種類のトラスの水平と斜めの部材 1, 2 の軸力はどれも

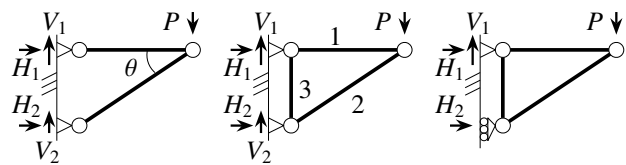


図 2.53 壁に直接固定した場合等の例

$$N_1 = -P \csc \theta, \quad N_2 = P \cot \theta$$

と求められる。そして、一番左側のトラスの場合は支点反力が四つあるにもかかわらず、2部材が壁に直接固定されていることから、すべての反力が求められる。ちょっと不思議だが、確かに $n = 0$ である。もちろん一番右側のトラスも $n = 0$ で支点反力は三つなので、反力とすべての部材の軸力は唯一に求められる。これに対し真ん中のトラスは $n = 1$ なので、支点反力二つと部材 3 の軸力に対して

$$V_1 + V_2 = P, \quad V_1 = N_3$$

の二つの式しか得られない。第 1 式が正しいことはすぐにわかるが、 V_1 や V_2 , N_3 の個々の値は求められない。これも「不静定構造」なのだ。だが勘が鋭い読者なら「部材 3 は両端が固定されているから軸力なんか生

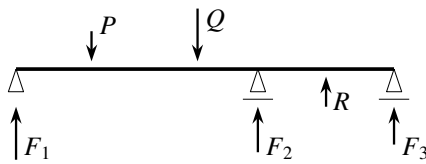


図 2.54 2 径間連続梁

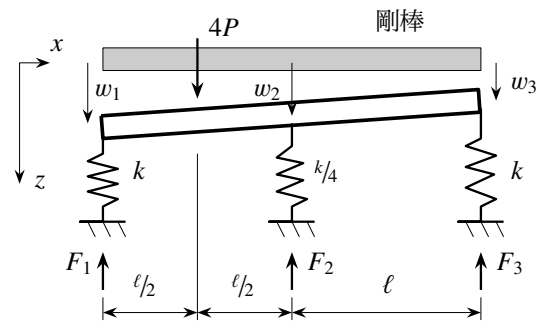


図 2.55 簡単な不静定構造系

じないのはすぐにわかるから、 $N_3 = 0, V_1 = 0, V_2 = P$ が解で、一番左側のトラスと同じ結果になるでしょ。」と指摘するかもしれない。しかしそこでは、部材3が伸びていないから軸力が零だという関係が無意識に使っている。つまり力のつり合い以外の条件式（あとで説明するひずみと抵抗力の関係式：構成方程式）を使っている。もし部材3の初期の長さがその固定端間隔よりも長かったらどうなるだろう。無理やり縮めてからこの固定端の間に挟まざるを得ないから、軸力 N_3 はその長さを縮めるのに必要だった値を持つことになる。そういう初期の状況が明記されない限り、この真ん中のトラスの問題の解は不定なままなのである。

2.4.2 不静定構造が解けるためのヒント

梁の場合も、一本の梁の支点が図 2.54 のように3箇所になると、各支点における反力をつり合いのみからは求めることができない。つまりこの問題の場合には未知の支点反力が三つあるのに、この面内の鉛直方向の力のつり合いとモーメントのつり合いとの二つしか条件が無いから、条件が一つ不足してしまうからだ。したがって断面力も求めることができない。これはトラスの場合と同様不静定な構造になっており、不静定梁の代表例である。

この不静定構造を解くためにはどうしたらいいかを考えるために、少し問題を簡単にして、図 2.55 に示したように棒は変形しない剛なものとし、その代わりに、支点にバネ定数 k あるいは $k/4$ を持つ線形バネを挟んでおいて、どのようにしたら三つの支点反力を求めることができるかを考えてみよう。まず、それぞれの支点反力を F_1, F_2, F_3 と置いて z 方向の力のつり合い条件を表すと

$$4P - F_1 - F_2 - F_3 = 0 \tag{l}$$

となり、一方、左端支点回りの反時計回り方向のモーメントのつり合い条件は

$$lF_2 + 2lF_3 - l/2 \cdot 4P = 0 \tag{m}$$

である。確かにこれだけでは条件が不足しており反力を求めることはできない。

そこでこの支点にはバネが挟んであることを考えると、支点上の剛な棒はそれぞれ z 方向に沈下していることがわかる。この z 方向の各支点の沈下量を w_1, w_2, w_3 とすると、線形バネなので支点反力と沈下量は

$$F_1 = kw_1, \quad F_2 = k/4 w_2, \quad F_3 = kw_3 \tag{n}$$

という関係を満たさなければならない。これで条件式が三つ増えたが、未知数としての支点沈下量もさらに三つ加わったため、まだ一つ条件が不足している。実は不足している条件は、この棒が剛であることから得ることができる幾何学的（運動学的）なものである。

つまり、外力 P が作用する前にまっすぐだった剛な棒は、载荷後に支点が沈下したあともまっすぐなままでなければならないという幾何学的あるいは運動学的な整合性を、ここまでではまだ考慮していないことに気付

く。この条件は、例えば、左の二つの支点間の棒の傾きが右の二つの支点間のそれに等しいという条件式で表すことができる。つまり

$$\frac{w_2 - w_1}{\ell} = \frac{w_3 - w_2}{\ell} \quad \text{あるいは} \quad w_1 - 2w_2 + w_3 = 0 \quad (o)$$

でなければならない。これで六つの未知数に対して六つの条件式を得たから、問題は解けるはずである。

式 (n) を式 (o) に代入すると

$$F_1 - 8F_2 + F_3 = 0$$

となるから、式 (l) (m) と合わせて連立方程式にすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表されるので、最終的に支点反力を

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \frac{P}{18} \begin{pmatrix} 17 & -9 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{P}{9} \begin{pmatrix} 25 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

のように得ることができる。これを式 (n) に代入し直せば、支点沈下量も

$$w_1 = \frac{25}{9} \frac{P}{k}, \quad w_2 = \frac{16}{9} \frac{P}{k}, \quad w_3 = \frac{7}{9} \frac{P}{k}$$

と求められる。

この簡単な例のように、力のつり合い条件だけでは解けない構造を不静定構造と呼んでいると思えばいい。不静定構造の解析に当たっては、式 (n) で与えたような変形できる構造部材の変形と抵抗力の関係と、式 (o) で示したような変形（この場合は剛棒だったので、棒全体の傾きであったが）と変位（沈下量）の関係とが、つり合い条件式以外に必要となる。このように、変形できる物体の力学は一般には

つり合い式: 力およびモーメント（抵抗力）のつり合い条件式 — Newton の法則（上の例では式 (l) (m)）

ひずみの定義: 変形量（ひずみ）と移動量（変位）の関係式 — 変形とは？（上の例では式 (o)）

構成方程式: ひずみと抵抗力の関係式 — 材料の性質（上の例では式 (n)）

の三つの条件を同時に満足する数理問題として表されなければならないのだ。トラスや梁も変形することによって抵抗する構造系なので、同様にこのような三つの条件でその挙動は支配されることになるはずだが、まず次の章では一般論としての変形できる物体の力学（連続体の力学）について説明し、その次の章でより一般的な構造力学に戻ることにしよう。

逆行列の求め方: 3×3 の行列 (A) の逆行列は次のようにして求めることができる。

$$A_{ij}^{-1} = \left((A) \text{ の余因子行列 } \right)_{ij} / \det(A)$$

ここで行列式 $\det(A)$ は、 3×3 の行列の場合は例のたすき掛け式で求めることができる。また、余因子行列は

$$\left((A) \text{ の余因子行列 } \right)_{ij} = (-1)^{i+j} (\underline{j \text{ 行 } i \text{ 列}} \text{ を指で隠した小行列の行列式})$$

を並べた行列である。計算したい要素と対角の位置をかなめとする行と列を隠すことと、符号が一つおきに変わることに注意しなければならない。もちろん、上の公式はサイズに依存しないが、手で計算できるのは 4×4 くらいが限度であろう。また 2×2 の場合にはもっと簡単に

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \det(A) = ad - bc$$

となる。 3×3 の場合の公式は式(H.23)(H.24)を参照のこと。☐

演習問題 2-6

13. 図 2.53 のトラスの支点反力と軸力を求めよ。
14. 3 本足の椅子の場合は、鉛直方向の力のつり合いと、座板に含まれるある 2 軸回りのモーメントのつり合いとから、足の三つの反力を求めることができる静定系であるが、不静定な 4 本足の椅子の場合を上と同じように解いてみよ。ただし、座板は剛体で、足がバネ定数 k の線形バネと考えていいものとする。また、どの位置に集中外力が作用すると椅子が転倒するかについても求めてみよ。なお、 \otimes は外力 P の向きが紙面奥行き方向であることを示すが、これは 4 枚の矢羽根の付いた矢を後ろから見たものをイメージしている。したがって、紙面手前向きの場合は \odot となる。

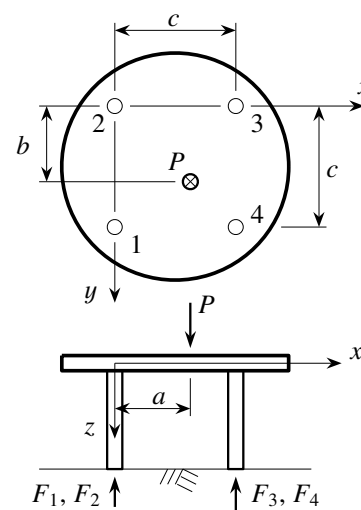


図 2.56 4 本足椅子の反力

‘Vanilla:’ 「スパゲティ」のアクセントは「スパゲティ」だ。アイスクリームは「ヴァニラ」で発音も難しい。第 1 著者留学時の寮の食堂では ‘vanilla’ アイスクリームが基本で、他に 1 種類以上がサービスされた。「今日は何?」と聞いて ‘banana’ があるときは判別し難かったし、サービスしてくれる学生（米国人）も「あー発音し難い」と叫ぶくらいだった。そしてアイスクリームもクッキーも ‘chocolate chip’ は大人気だ。後者は焼き立てを待つ行列ができるほどだ。ところで、‘career’ は「クリア」に聞こえ、‘kilo’ は「ケロ」に聞こえる。どうして?



写真 2.6 Chicago River に架かる可動橋 Wabash Avenue Bridge²², Illinois 州



電話で「岩熊」の漢字表記を伝えるときは「岩手県の岩と熊本県の熊」あるいは「動物の熊」と言うようにしている。米国でも例えば‘N’を‘N as in Nancy’といった表現で伝えることがある。これは‘N’や‘M’の判別が難しいからだ。このアルファベットを音声で伝える方式にはある程度決まりがあるらしい。例えば‘Ted’は‘Tango-Echo-Delta’となる。

| | | | | |
|------------|-----------|------------|-------------|-----------|
| A: Alpha | B: Bravo | C: Charlie | D: Delta | E: Echo |
| F: Foxtrot | G: Golf | H: Hotel | I: India | J: Juliet |
| K: Kilo | L: Lima | M: Mike | N: November | O: Oscar |
| P: Papa | Q: Quebec | R: Romeo | S: Sierra | T: Tango |
| U: Uniform | V: Victor | W: Whiskey | X: X-ray | Y: Yankee |
| Z: Zulu | | 9: Niner | ‘9’ だけ特殊 | |

²² 昔のシカゴの写真は<http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/civil/node27.html> に。この写真の右側奥にあのトウモロコシのような有名な Marina City があり、そこにはヨットハーバーもあるため、マストをたためないヨットの通行のために橋が開く。この写真の左手にある Michigan Avenue Bridge (p.785) も開いている。これは確か土曜日の正午だったと思う。

第3章

変形できる物体の力学基礎

3.1 連続体とは

この文書が対象としているのは変形できる物体だと述べたが、通常は連続体と総称される。連続体は固体とは限らず、流体力学が対象としている各種流体もたいていは連続体である。しかし連続体とは何だろう。身の回りの物体は本当に連続体、つまり中身が稠密な物体ばかりだろうか。鋼もコンクリートも顕微鏡でどんどんミクロな部分を観察すると隙間だらけだろう。またこの文書のあちこちの写真にある橋の模型で用いたスポンジは中に空隙が無数に存在していて、部分的にしか連続していない。しかし、この文書で対象とするのは中身が稠密な連続体である。

ところで‘Powers of Ten’ [69] という楽しい「旅」の本¹をご存知だろうか。題目は「10のべき乗」という意味だ。地球から約10億光年(10^{25} m)離れた地点は、地球からの可視宇宙の半径の約 $1/50$ 程度である。その地点²から、シカゴのフットボール場横の公園で昼寝をしている青年の手の甲を見ている。そこから旅を始めて地球への距離を $1/10$ ずつ縮めていく。そして手の甲からは体内へと視点に移る。旅の最後には0.1フェルミ(10^{-16} m)の宇宙に到達し、そこには各種のクォークが分散しているという具合だ。0.1 μm (10^{-7} m)の宇宙には離散的に分布したDNAが密集しているが、それも含めたどの視点における宇宙も、連続体とは呼べないような離散的な空間だ。

しかし我々は、物体の「点」に例えば座標 (x, y, z) で「名前」を付け、その「物質点」が持つ物理的性質や量を関数 $f(x, y, z)$ で表そうとしている。これは実際にはそうではないが、物体の一種の数学的なミクロな極限でも物質が稠密に連続して分布していると仮定していることに他ならない。この文書では、まさにそのような数学的なモデルとしての連続体を取り扱っていることには注意して欲しい。このように物質点の関数として物理量を定義してモデル化する手法を局所理論と呼んでいる。これに対し、連続体として取り扱うものの、物質点のみならずその近傍からの影響も考慮して取り扱う手法を非局所理論と呼ぶことがある。後者はこの文書の守備範囲には含まれていない。

さらに、物体内部の抵抗力をモデル化する段階では、その連続体の中にさらに面積が無い内部表面や体積が無い内部領域を対象とする。それは関数 $g(x)$ の変化率を数学表現する際に用いる微係数 $\frac{dg(x)}{dx}$ の「分母」にある dx の考え方

$$\frac{dg(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta(\cdot) \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$$

¹ 本と同じ著者が作ったと思われるオリジナルフィルムがYouTubeにある。購入目的で以前探したが見つからなかったものだ。

² 「宇宙」は英語で‘space’つまり空いた場所、何も無いところ。だから非連続体である。

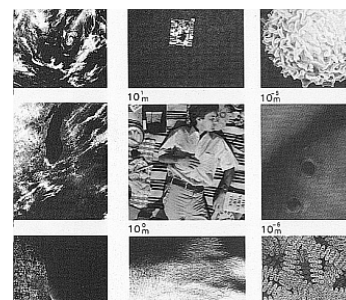


写真 3.1 $1/10$ ずつの旅

と同じである。第2.3.5(1)節では、梁の中から長さ dx の部分を取り出してつり合いを考えたあと、この長さ dx を零にする極限をとったことを思い出して欲しい。これはあくまでも理想的な取り扱い方であり、そのくらいの視点からの把握で実際の現象を十分な精度でモデル化できることが明らかな場合に用いられる方法である。したがって、分母が零になる（同時に分子も零になるのだが）ことや原子間には隙間があること等を思い出して、過度に神経質になったりしないようにして欲しい。

3.2 変形の定義

3.2.1 変位ベクトル

応力とひずみのことをある程度知っていて、構造力学の勉強をしたい人は第4章から読めばいい。そうしながら、もし途中でわからなくなったときには、この章に戻ってくるという読み方³でもいい。さて構造力学は変形できる物体の力学の一つであるが、第2章では変形そのものは議論せず、変形によって物体内部に生じる抵抗力つまり内力を導入し、変形できる物体の抵抗の仕方だけを感じてもらった。しかしその最後には、不静定構造の場合には反力すら求められないことがわかり、内力だけではなく変形の仕方も考慮しなければならないことを学んだ。そこでこの章では変形そのものをまず幾何学的に定義し、その変形によって材料はどのような抵抗力を発揮することができるかと考えるのか、という記述の仕方⁴で連続体の力学の基礎を説明しよう。なおこの章は、微小変位・微小変形理論の枠組内のほぼ線形系の理屈だけを説明する。

変形できる物体に外力等の外からの作用を与えると物体は移動し変形するだろう。まず、その移動量を定義する。簡単のために直交直線座標（直角座標）系で説明する。物体がまだ作用を受けていない状態を初期状態と呼び、そのときの座標値の組⁵ (x_1, x_2, x_3) を、その座標位置に存在する「物質点」の「名前」とする。すなわち図3.1のように物体中の点Aの初期の位置ベクトルを

$$\mathbf{p}^0(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 p_i^0 \mathbf{e}_i, \quad p_i^0 = x_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

と表す。 \mathbf{e}_i は座標軸方向の単位基底ベクトルである。さて、外からの作用を受けて物体が変形し移動して図の右の方に示した位置に到達したとする。そして物質点Aの、この状態の位置ベクトルが

$$\mathbf{p}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 p_i(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_i \quad (3.2)$$

になったものとする。初期状態における位置ベクトルの座標成分 (x_1, x_2, x_3) でその物質点の名前を定義しているので、変形した状態の位置ベクトルとその成分も同じように名前 (x_1, x_2, x_3) の関数になる。

この変形前後の位置の差が物体中の任意点Aの移動量であることから点Aの変位ベクトルと呼び、それは

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) \equiv \mathbf{p} - \mathbf{p}^0, \quad u_i \equiv p_i - x_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.3a, b)$$

で定義される。変位ベクトルも点の名前 (x_1, x_2, x_3) の関数である。なお以下、自明過ぎる箇所では諸関数の引数 (x_1, x_2, x_3) を適宜省略することがある。

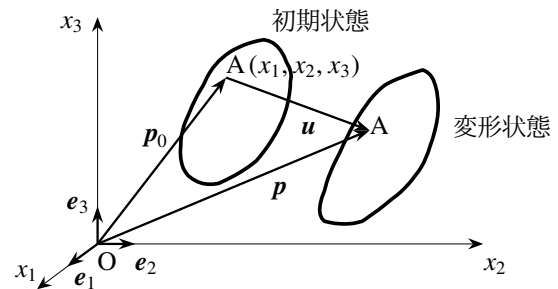


図3.1 物体の位置と変位ベクトル

³ 西野文雄先生は、前から順に読まないといけない教科書はあまりよろしくないとおっしゃっていました。

⁴ 抵抗力を先に教える教科書が多いが、抵抗力が（難しい；直接は測定できない）数学的な概念であるのに対し、変形は純粋に幾何学的な定義なので、そちらのわかり易い方を先に説明する。実際、変形が本質なのであって、西野流・Nemat-Nasser流である。

⁵ この章ではこれ以降、 (x, y, z) の代わりに数字の添え字付きの座標値やベクトル成分を用いるが、他の章では (x, y, z) を用いたりその記号を添え字に用いる等、全体としては統一していない。

3.2.2 ひずみテンソル

(1) 形が変わるといふことは

写真 3.2 には、正方形と円を書き込んだ「のびのびサロンシップ H」⁶の初期状態と、左右方向に引張られた状態とを併せて示した。インクで印を付けることによってシートの特定点に「名前（式 (3.1) の (x_1, x_2, x_3) という位置で定義した名前）」を付けたこと

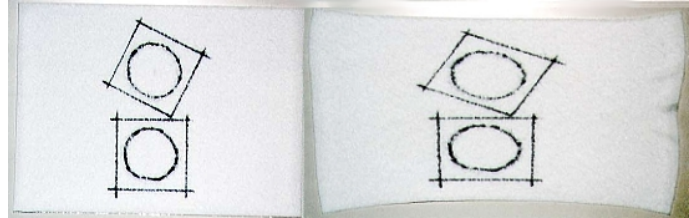


写真 3.2 伸び縮みと角度変化 — 代表的な変形成分

になっていて、その物質点の動きを追跡していることになる。下段の正方形と円が、変形した状態では引張った方向に伸びてそれぞれが長方形と楕円になっている。また、わずかだが引張った方向と直交する上下方向には縮んでいる。一方上段の斜めにした正方形を見ると、変形後には角の直角が変化し、それが伸び縮みと合わさって不等辺の平行四辺形になっている。この簡単な実験から、物体の変形には少なくとも「伸び縮み」と「角度変化」の 2 種類があることがわかる。

(2) 伸び縮み変形

簡単のために図 3.2 に示したように物質点の x_1 軸方向の変位で伸び縮みを定義する。この x_1 方向の伸びひずみ成分を e_1 と表記すると、元々 dx_1 の長さを持っていた微分要素は、変形後には $dx_1 \times (1 + e_1)$ の長さになる。この 1 次元の図の

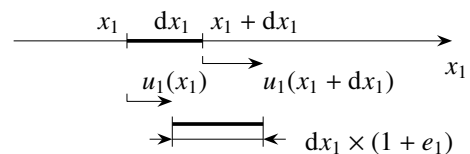


図 3.2 伸び縮み変形

$$dx_1 \times (1 + e_1) + u_1(x_1) = dx_1 + u_1(x_1 + dx_1)$$

という幾何学的関係から $e_1 dx_1 = u_1(x_1 + dx_1) - u_1(x_1)$ となるので、ここで $dx_1 \rightarrow 0$ の極限をとって 3 次元に拡張すれば、任意点 (x_1, x_2, x_3) の伸びひずみ成分 e_1 を

$$e_1(x_1, x_2, x_3) \equiv \lim_{dx_1 \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3) - u_1(x_1, x_2, x_3)}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (3.4)$$

と定義することができる。

(3) 角度変形

やはり簡単のために図 3.3 にあるように、平面上の正方形が平行四辺形に変化した場合を考える。初期状態では座標軸と平行な辺でできていて直角だった角が、図のように x_1, x_2 軸とそれぞれ α, β だけの角変化が生じたとすると、左側の太い平行四辺形から

$$\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha = \lim_{dx_1 \rightarrow 0} \frac{u_2(x_1 + dx_1, x_2) - u_2(x_1, x_2)}{dx_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

と考えることができ、したがって同様に

$$\beta = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

と表現できることもわかる。もちろん角度は非常に小さいものと仮定してある。

ここで注意しなければならないのは、それぞれの辺の回転量に過ぎない α, β の「それぞれ」が必ずしも「変形」としての角変化だけを表しているとは限らないということだ。例えば $\beta = -\alpha$ といった特別な関係にある場

⁶ 第 1 著者が学生のとき、確か Encyclopedia of Physics で（文献 [97, 98] のどちらかだったかもしれない）正確な実験写真を見たことがある。それを思い出して簡便な実験で再現したのがこの写真である。「のびのびサロンシップ H」® は久光製薬の登録商標である。

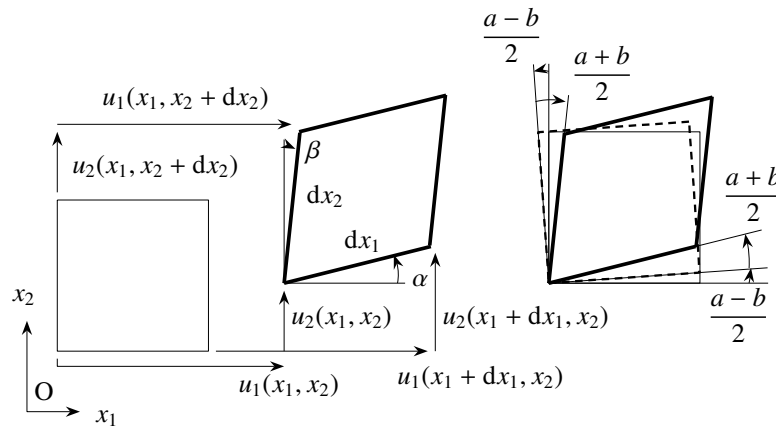


図 3.3 角度変形 — 変形しない回転成分と歪みの角度変化成分

合には、正方形の元の直角は保持されたまま $(\alpha - \beta)/2 = \alpha$ の回転をするだけで、「変形 = 歪み」の角度変化は生じていない。したがって、 $(\alpha + \beta)$ のように加算して単純な回転成分を取り除いたものが角度変化である。このように、 α と β には単純な回転も含まれていることに留意すると、同じ図の右側で説明しているように

1. 正方形は変形しないまま、反時計回りに $\frac{(\alpha - \beta)}{2}$ だけ回転して破線で表した位置にくるが
2. そのあと、二つの辺が $\frac{(\alpha + \beta)}{2}$ ずつお互いに反対方向に回転し、直角が崩れて変形し（歪んで）

最終的な位置に落ち着くと考えた方がよさそうである。つまり、2 辺の回転の「和」が角度変化（歪み）に相当するものと考えないといけない。このことから、この x_1 - x_2 面内の「変形」を伴う角度変化を 2 辺それぞれのせん断ひずみ成分 ϵ_{12} , ϵ_{21} と表記することになると、それは上の箇条の 2 番目の成分だけなので

$$\epsilon_{12}(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \epsilon_{21}(x_1, x_2, x_3) \quad (3.5)$$

と定義していいだろう。ただし直角の崩れ自体は二つの成分の和 ($\epsilon_{12} + \epsilon_{21}$)、つまり後述の工学ひずみになる。

(4) ひずみテンソルの定義

式 (3.5) を見ながら、式 (3.4) の伸びひずみ e_1 を見直すと、無理やり

$$e_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)$$

とも書くことができることから、この e_1 を ϵ_{11} と表記することにして ϵ_{12} といっしょにまとめると、任意点の変形状態を

$$\epsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.6)$$

で定義した六つ（九つ）のひずみテンソル成分で表すことができることに気付く。第 2.4.2 節の不静定問題の式 (o) が、この変形と変位の関係に相当する。なお定義から明らかなように $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$ であることから対称なテンソルと称され、九つのうち六つがある種独立したひずみ成分である。設定した座標系に限定すれば、 $i = j$ の成分が伸び縮みの変形成分であり、 $i \neq j$ の成分が角度変化の変形成分である。

テンソルという言葉を初めて用いたが、それは大雑把には「ある種の物理的に意味のある量」[26] を指していると考えればいい。スカラーやベクトルもテンソルの一種である。それぞれ 0 階と 1 階のテンソルで、上述のひずみテンソルは 2 階のテンソルである。その表記には、成分を用いて式 (3.6) のように書く場合もあるが、

直接表記と称してベクトルと同様太字⁷で $\epsilon(\mathbf{x})$ と表記する場合もある。またその成分との関係のある種の表記上の規則を別途用意した上で

$$\epsilon = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

と書く場合（この文書の前半ではほとんど用いない）や、行列表示で

$$\epsilon \sim \left(\epsilon \right) \equiv \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \left\{ \epsilon \right\} = [\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \epsilon_{23} \ \epsilon_{31} \ \epsilon_{12}]^T$$

と表す場合もある。右の式の列ベクトル表示の場合の成分の順番にはある合理性がある。

3.2.3 剛体変位成分と微小回転 — 「変形」とは

せん断ひずみを定義した際に見たように、物体の移動量（変位と、その微係数）には「変形」を含んでいない部分がありそうだ。すなわち式(3.6)で定義したひずみ成分を零にするような変位成分とその微係数が存在する。そういった変位を総称して剛体変位（並進変位と回転変位）と呼んでいる。例えば図3.4の左の図は1本の棒がその

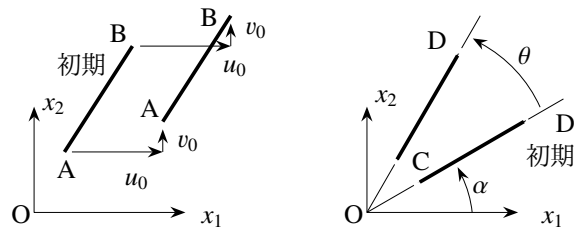


図 3.4 剛体変位成分

のまま平行に移動しているだけなので、変位ベクトルはいたるところ $\mathbf{u} = \text{const.}$ である。したがって、式(3.6)に代入してもひずみ成分はすべて零になる。このような変位成分を剛体並進変位成分（あるいは単に剛体変位）と呼ぶ。その右の図は同じく棒が原点の回りに回転しただけである。したがって棒の任意点の変位成分は、微小回転なので $|\theta| \ll 1$ としてもいい（図ではわかり易いように θ を大きな角度にしてある）から

$$u_1 = r \{ \cos(\alpha + \theta) - \cos \alpha \} \simeq -r \theta \sin \alpha, \quad u_2 = r \{ \sin(\alpha + \theta) - \sin \alpha \} \simeq r \theta \cos \alpha$$

となる。あるいは

$$u_1 = -x_2 \theta, \quad u_2 = x_1 \theta \tag{*}$$

と書ける。これもひずみの定義式(3.6)に代入すると、それはすべて零になる。この変位成分を剛体回転変位成分（あるいは単に剛体回転）と呼ぶ。

このことから、外「形」が「変」わった（広義の変形）ように見えても、それは a) 剛体（並進）変位および b) 剛体回転の和である剛体変位成分と、 c) 物体が外力に抵抗して「形」を「変」えた（狭義の）変形成分あるいは歪み成分との和になっていることがわかる。今まで「変形」を正確には定義していなかったが、これ以降は原則としてこの c) の成分だけを「変形」と呼ぶ。さらに、その狭義の「変形」は、i) 伸び縮み成分と ii) 角度変化成分でできていることは、ここまでに示した通りである。そういう意味から「変位」と「変形」も厳密に区別して用いる必要がある。

図3.3 でせん断ひずみを考えたときに、任意の回転変形の中の $(\alpha-\beta)/2$ を剛体回転成分と解釈した。すなわち

$$\omega_{21} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

⁷ 手書きのときは板書体で ϵ とするか太字指定の校正記号を使って $\underline{\epsilon}$ のように下波線を入れる。

は着目している点の回転成分であろう。実際に上式(*)を代入すると $\omega_{21} = \theta$ になる。これを一般化して

$$\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad (3.7a, b)$$

で微小回転テンソル ω の成分を定義（添え字の順番が逆で正負が異なる定義も存在するので注意）する。式(3.6)のひずみテンソル成分と併せて考えると

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (3.8)$$

となる。すなわち、変位勾配テンソル成分（左辺）の対称成分（右辺第1項; $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ ）がひずみテンソル成分であり、反対称成分（右辺第2項; $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ ）が微小回転テンソル成分になっていることがわかる。

3.2.4 ひずみの主方向

再度写真3.2を見直してみよう。左の写真の上段の傾けた正方形が水平な正方形に見えるように、そのページを反時計回りに若干回転させた状態にして、右の写真を見て欲しい。このとき、どちらの円も同じ楕円にしかかかっていないが、上段の正方形は平行四辺形になっているように見え、下段の正方形は角度変化が無いまま2方向に伸び縮みが生じただけに見える。しかしこの実験は1枚のシートを一様にそして単純に左右に引張っただけなので、上下段の図形はどちらも本質的には完全に同じ「変形状態」にあるはずである。だからこそ、二つの円は同じ楕円になっていた。にもかかわらず、変形前に同じ形だが異なる向きを持った二つの正方形の変形を観察すると、それはそれぞれ異なった図形になっているので、上段と下段で異なる「変形状態」になっているようにも見えてしまう。このように、本当は同じ「変形状態」なのに観測の仕方によって異なる変形のように見えてしまうことには十分注意する必要がある。すなわち、このシートの変形を表している「ひずみテンソルそのものは一つの状態を表す物理量である」にもかかわらず、見る向きすなわち観測者が立脚している「座標系によってその成分は値が異なる」し、変形の性状も違って見える。このことは、テンソル「成分」を安易に可視化したとしても力学的な本質が見えるとは限らないことを示唆している。特に膨大な数値解析結果を整理するときには、例えば汎用プログラムのポストプロセサの使い方には十分な注意が必要になる。だってそうだろう。成分というのは人間が勝手に設定したある特定の座標系方向の成分であって、それは必ずしも力学的な現象の本質的な方向と一致しているとは限らないからだ。いろいろなテンソルの意味を考えるとその成分だけに着目すると、とんでもない勘違いをする可能性があるので注意すべきである。

この例を逆に考えると、どんな「変形状態」であっても写真の円あるいは下段の正方形のような相直交する方向への単純な伸び縮み状態として捉えることができることもわかる。このような、任意の変形を単純な伸び縮み状態として捉えられる向き（座標系）を見出したとき、その伸び縮みの方向をひずみの主方向と呼んでいる。また、その主方向の伸び縮みのひずみ成分を主ひずみと呼ぶ。任意の「変形状態」は、この主方向三つ（二つが独立）と主ひずみ三つの組で唯一に表現できそうだ。その具体的な求め方は第3.3.6(4)節で説明する。またMohrのひずみ円についての第3.6.3(3)節でも説明する。写真3.2の場合の主方向は、変形後の二つの楕円の主軸が示すように、このシートの2辺に沿った直交する2方向である。

3.2.5 ひずみ成分の座標変換

ひずみテンソルはある「変形状態」を唯一に定義する物理量である。だから「テンソル」と呼ばれている。しかし写真3.2でも見たようにその成分は観測者の定義した座標系によって異なる「値」を持つ。したがって「テンソル」と「テンソル成分」という言葉は注意深く使い分ける必要があるが、この文書ではそのあたりはいい加減なので注意して欲しい。ここでは、異なる座標系間のひずみテンソル成分間の関係を求めておく。し

つこいようだが、特に3次元の連続体でテンソル「成分」を解釈するときには、その座標系に物理的・材料的必然性があるのかどうかを注意深く考察しておく必要がある。そうでないときには、前節の主ひずみのように、座標によらない何らかの量を用いて解釈することを検討すべきである。

さて初期状態の任意の微分要素を取り出し、その長さを ds_0 とすると、Pythagoras の定理から

$$(ds_0)^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i$$

となる。これが変形後に ds になったとすると、式(3.2)(3.3)より

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^3 dp_i dp_i, \quad dp_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right) dx_j = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \delta_{ij} \right) dx_j$$

と書くことができる。ここに δ_{ij} は **Kronecker** のデルタと呼ばれ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{もし } i = j \text{ のとき} \\ 0 & \text{もし } i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.9)$$

という値を持つ記号（テンソル成分ではない）であり、行列表示すると単位行列になる。 x_1 は x_1 で微分すると1になるが x_2 で微分すると0になる。そういったことを簡単に表すとき等に便利な記号で、この文書でもよく使われる。式(3.8)の関係を上式に代入して少し演算すると、線形部分だけの近似⁸の範囲で

$$\begin{aligned} (ds)^2 - (ds_0)^2 &= \sum_k \left\{ \sum_i \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \delta_{ki} \right) dx_i \right\} \left\{ \sum_j \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \delta_{kj} \right) dx_j \right\} - \sum_i dx_i dx_i \\ &= \sum_i \sum_j \left(\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \delta_{ij} \right) dx_i dx_j - \sum_i \sum_j \delta_{ij} dx_i dx_j \\ &\simeq \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 2\epsilon_{ij} dx_i dx_j \end{aligned} \quad (3.10)$$

と書くことができる。つまり、ひずみテンソルの成分は上式のような形で変形前後の微分要素の長さの差で定義された物理量と考えてもいい。式(3.10)の演算は初学者には今は難しいとは思いますが、慣れると結構簡単なことをしていることもわかる。ところで、上式右辺になぜ‘2’が付いてしまったのか不思議に思う読者もいるだろう。そこで特殊な例としてすべての方向に同じ伸び‘ ϵ ’だけが生じたとしよう。すると

$$\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$$

のように3方向共に同じ伸び状態だから、上式(3.10)に代入して演算すると

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = \sum_i \sum_j 2\epsilon \delta_{ij} dx_i dx_j = 2\epsilon \sum_i dx_i dx_i = 2\epsilon (ds_0)^2$$

となる。左辺の $(ds_0)^2$ を右辺に移項して辺々平方根をとると、ひずみは非常に小さいため、すべての方向の伸びについて

$$ds = \sqrt{1 + 2\epsilon} ds_0 \simeq (1 + \epsilon) ds_0$$

が成立するので、 ϵ の物理的な意味と式表現が整合する。つまり、長さの2乗同士の差でひずみを定義している⁹ために係数に‘2’が必要だったわけだ。

⁸ 厳密な非線形的表現は第12章に示してあるが、物理的な意味は曖昧になってしまう。

⁹ この長さの2乗を用いていることが、有限変形理論ではある種の困難を産む（第12章参照）。

ここで、異なる座標系 \bar{x}_i を考えた場合、式 (3.10) の左辺は座標系によらず同じ値を持つスカラーなので、新しい座標系でひずみテンソル成分を $\bar{\epsilon}_{ij}$ と表記した場合には

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 2\bar{\epsilon}_{ij} d\bar{x}_i d\bar{x}_j = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l 2\bar{\epsilon}_{ij} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_l} dx_k dx_l$$

と記すことができる。ここで座標変換を

$$T_{ij} \equiv \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \quad (3.11)$$

で定義すれば、上式右辺と式 (3.10) の右辺とが等しい条件から、ひずみテンソル成分同士の関係を

$$\epsilon_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \bar{\epsilon}_{kl} T_{ki} T_{lj} \quad (3.12)$$

と得る。座標変換を行列表示すると、その正規直交性から式 (3.12) は

$$\left(\epsilon \right) = \left(T \right)^T \left(\bar{\epsilon} \right) \left(T \right), \quad \left(\bar{\epsilon} \right) = \left(T \right) \left(\epsilon \right) \left(T \right)^T \quad (3.13a, b)$$

のような行列表現もできる。 τ の上付き $()^T$ は転置行列を表す。この関係は、任意の2階のテンソル成分の座標変換則にもなっている。

3.2.6 体積ひずみとせん断ひずみ

伸びひずみ成分 ϵ_{11} 等は微分線要素の長さの伸び変化を示していたから、ひずみが微小である限り、体積ひずみは

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \frac{\text{変形後の体積} - \text{元の体積}}{\text{元の体積}} = \frac{dx_1(1 + \epsilon_{11}) \times dx_2(1 + \epsilon_{22}) \times dx_3(1 + \epsilon_{33})}{dx_1 \times dx_2 \times dx_3} - 1 \\ &\simeq \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \quad \rightarrow \quad \Delta = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk} \end{aligned} \quad (3.14)$$

で定義できるはずだ。 Δ は膨張で正になる。なお、ひずみテンソルを行列表示をしたときの対角項の和を、その行列の跡と呼ぶことから

$$\Delta = \text{tr} \left(\epsilon \right)$$

と表現されることもある。

これに対し、ひずみテンソル成分から体積ひずみ成分を取り除いた成分を偏差ひずみテンソル成分と呼び

$$\epsilon'_{ij} \equiv \epsilon_{ij} - \delta_{ij} \frac{\Delta}{3} \quad (3.15)$$

で定義する。体積ひずみ成分を '3' で割ったものは3方向の伸びひずみの平均ひずみであり、また当然ではあるが、偏差ひずみ ϵ'_{ij} は体積ひずみ成分を持たない $\left(\sum_{i=1}^3 \epsilon'_{ii} = 0 \right)$ 。

それぞれの物理的意味を理解するために、図に描きやすい2次元空間で考えてみよう。2次元の場合には、体積ひずみ成分の代わりに面積ひずみ成分を考えればいため、少し定義を変えて

$$\epsilon^{(2)'}_{ij} \equiv \epsilon_{ij} - \delta_{ij} \frac{\Delta^{(2)}}{2}, \quad \Delta^{(2)} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22}$$

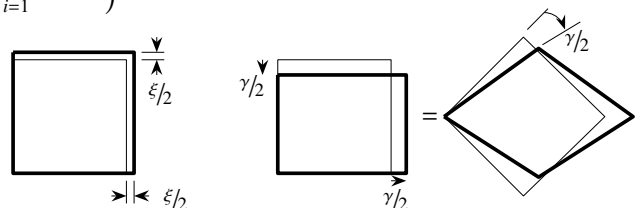


図 3.5 体積ひずみ成分とせん断ひずみ成分

で偏差ひずみと面積ひずみが定義できる。上付きの '(2)' で 2 次元であることを明示した。例えば図 3.5 の左側の図のように 2 方向に同じ伸び $\xi/2$ が生じたあと、そのすぐ右の図のように 2 方向に同じ大きさで異なる向き（伸びと縮み）の $\gamma/2$ が生じたとする。すると、そのひずみ成分は二つの成分を重ね合わせて

$$\epsilon_{11} = \frac{\xi}{2} + \frac{\gamma}{2}, \quad \epsilon_{22} = \frac{\xi}{2} - \frac{\gamma}{2}, \quad \epsilon_{12} = 0$$

となる。これから体積ひずみ成分 $\Delta^{(2)}$ を求めると

$$\Delta^{(2)} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} = \xi$$

であり、偏差ひずみ成分 $\epsilon^{(2)'}_{ij}$ は

$$\epsilon^{(2)'}_{11} = \epsilon_{11} - \frac{\Delta^{(2)}}{2} = \frac{\gamma}{2}, \quad \epsilon^{(2)'}_{22} = \epsilon_{22} - \frac{\Delta^{(2)}}{2} = -\frac{\gamma}{2}$$

となる。つまり等方な同符号の変形が体積ひずみであり、2 方向への大きさの等しい伸び縮み（逆符号の）変形が偏差ひずみである。特にこの偏差ひずみは少しわかり難いので、異なる座標系からこの変形全体を眺め直してみよう。

まず、体積（面積）ひずみ成分に相当する成分（等方成分）に着目しよう。記号的な行列表示をすると

$$\left(\Delta^{(2)} \right) = \begin{pmatrix} \xi/2 & 0 \\ 0 & \xi/2 \end{pmatrix}$$

と書けるから、例えば 45 度だけ座標を時計回りに回転させてみよう。式 (3.13) の座標変換則を用いると

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \left(T \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \left(T \right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となるので、上の成分は回転させても

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi/2 & 0 \\ 0 & \xi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi/2 & 0 \\ 0 & \xi/2 \end{pmatrix}$$

と無変化である。すなわち、体積（面積）ひずみはそもそもスカラー量であり、したがってどんな座標系から見てもそれに対応する等方なひずみテンソル成分は不変であるという、当然の結果を示すことができた。単位行列はどんなに回転しても単位行列のままなのと同じである。

では偏差ひずみ成分はどうだろう。同様に行列表示すると

$$\left(\epsilon^{(2)'} \right) = \begin{pmatrix} \gamma/2 & 0 \\ 0 & -\gamma/2 \end{pmatrix}$$

となる。つまり x_1 方向に伸びた分だけ x_2 方向には逆に縮んでいる状態を表していた。体積（面積）ひずみの場合と同様に 45 度だけ座標を時計回りに回転させると

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma/2 & 0 \\ 0 & -\gamma/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma/2 \\ \gamma/2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{\epsilon}_{12} = \bar{\epsilon}_{21} = \frac{\gamma}{2}, \quad \bar{\epsilon}_{11} = \bar{\epsilon}_{22} = 0$$

を得る。すなわちこの 45 度回転した座標系 \bar{x} で偏差ひずみ成分を眺め直すと、単純に $\gamma/2$ ずつの角度変化（せん断ひずみ）だけしか生じていないことと同じだということがわかる。このことから、偏差ひずみ成分はせん断変形成分を表していると考えていい。45 度回転した座標系で変形の様子を図 3.5 の一番右に示した。この例

からも、任意の変形は体積ひずみとせん断ひずみの和で表現されていると考えていいことがわかる。また、座標系の選び方によって変形の様子が全く違って見えることも再度実感できたと思う。

さらにこの例では、 x 方向と y 方向がひずみの主軸になっている。体積ひずみは主軸の向きとは無関係なスカラー量なので、任意のひずみ成分の跡 ($\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$) で論ずればいい。それに対し、「変形状態」に含まれる角度変化（せん断変形）について論じるのであれば、その主軸から例えば 45 度方向の座標系で変形を観察すべきであることを意味しており、それは取りも直さず偏差ひずみ成分を議論すべきであることを示唆している。

3.2.7 ひずみの適合条件

さて、ひずみの定義式 (3.6) の定義記号を普通の等号にして左辺右辺を入れ替えると、ひずみ成分が与えられた場合の変位成分に対する連立微分方程式と捉えることができる。つまり、三つの変位成分が満足すべき六つの微分方程式だ。だとすると、微分方程式の数の方が解の数より多いことになる。一体どういうことだろう。それは、六つのひずみ成分を自由に任意に与えたときには、それに対する変位が存在しなかったり、唯一に求められなかったりすることを意味する。つまり、式 (3.6) の数行下に「ある種独立した」と書いた六つのひずみ成分の間には、実は何らかの制約条件が存在することになる。このような制約条件をひずみの適合条件式と呼んで¹⁰いる。物理的説明は例えば文献 [175] がわかり易いので、ここでは結果のみを示す。

物体のある点 P の変位とひずみとがわかっているとして、その近傍の点 Q の変位は式 (3.8) を用いて少し演算をすると

$$u_j(Q) = u_j(P) + \sum_k (x_k^Q - x_k^P) \omega_{jk}^P + \sum_k \int_P^Q U_{jk} dx_k$$

で与えられる。ここに

$$U_{jk} \equiv \epsilon_{jk} + \sum_l (x_l^Q - x_l^P) \left(\frac{\partial \epsilon_{kj}}{\partial x_l} - \frac{\partial \epsilon_{lk}}{\partial x_j} \right)$$

と置かれている。上の式の最後の積分は P→Q の積分路の選び方にはよらずに唯一に定まらなければならない。そうでないと点 Q の状態が複数存在してしまい、模式図 3.6 に示した [27] ように、連続体中に孔が空いたり物質が重なったりしてしまうことになる。この積分が経路に依存しない条件から

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \quad (3.16a, b)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0, \quad (3.16c, d)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (3.16e, f)$$

という関係（六つのうち三つが独立）を得る。文献 [109] にも数学的表現がなされているが、よくわからないので、これがひずみの適合条件式だと信じよう。特に 2 次元の場合には式 (3.16e) だけでよく

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} = 0 \quad (3.17)$$

となる。この式が正しいことは式 (3.6) の 2 次元の成分だけをこの左辺に代入すれば示すことができる（証明ではない）。このような適合条件を満足するひずみを適合ひずみと呼ぶ。適合ひずみと非適合ひずみについては第 3.4.4 節にその具体例を示す。

¹⁰ 式 (3.6) をひずみの適合条件と呼んでいる文献もあるが、それは適合ひずみならその成分が満たす式だけなので、この文書では式 (3.6) の方はひずみの定義式と呼ぶことにしている。

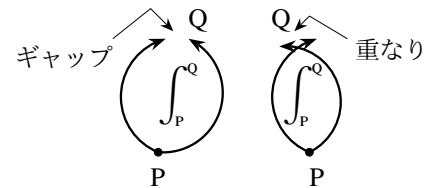


図 3.6 ひずみの適合性の模式図

演習問題 3-1

1. 2次元で、次のひずみ成分（アメリカ合州¹¹国 Illinois 州 Evanston, Northwestern 大学の Dundurs 先生の ‘Elasticity’ の講義ノート（1980 年頃）から）に対応する変位成分を求めよ。

a) $\epsilon_{11} = 2x_1 x_2^2, \epsilon_{12} = 0, \epsilon_{22} = -6x_1 x_2^2$

b) $\epsilon_{11} = 2x_1 x_2^2, \epsilon_{12} = 2x_1^3 + x_1^2 x_2 - x_2^3, \epsilon_{22} = -6x_1 x_2^2$

3.3 内力と局所的なつり合い式

3.3.1 変形できる物体の抵抗とは

第2章ではトラスと梁を例にして、内力（抵抗力）を断面力として導入したが、ここではその抵抗力をもつと物体の微視的・局所的な根本的な観点で定義し直そう。外力に対し変形して抵抗する物体は、前節のひずみを物体内部に発生させて抵抗しようとする。例えば鉛筆を握るとき、筋肉は脳からの信号を電気的・化学的に処理して指の必要な部分だけを「収縮」させ、指に挟んだ鉛筆を落とさないだけの「力」を発生させている。確かに「原子間力」までたどれば何らかの場とそれに対する内部の力が発生して抵抗していることは理解できるだろうが、現象のみを眺めると、この筋肉の収縮に相当する「変形」が「外力」に直接抵抗していることになる。しかし「変形」が無次元量であるのに対し、「外力」は力やモーメントの次元を持つ。したがって、このようにお互いの次元が異なる量同士が作用反作用し合って抵抗すると考えるのは思考上の困難を伴うだろう。そのため第2章では軸力と曲げモーメント・せん断力といった断面力（内力）を導入して外力に抵抗させた。ここでは前節の変形と関係付けることを念頭に置いて連続体の内力を定義する。

そこで図3.7のように、力（あるいは偶力や圧力）の次元を持った「内力」という抵抗力（原子間力の平均値のようなもの）を新しく定義することによって

1. 「外力」が作用すると、内部に「内力」による抵抗力が発生して、つり合って静止する。[A]
2. その「内力」の生じる本来の原因は「変形」であるから、物体の抵抗力は変形と直接関係がある。[B]
3. 「内力」と「変形」の関係[B]は、物体を構成している材料そのものの特性である。

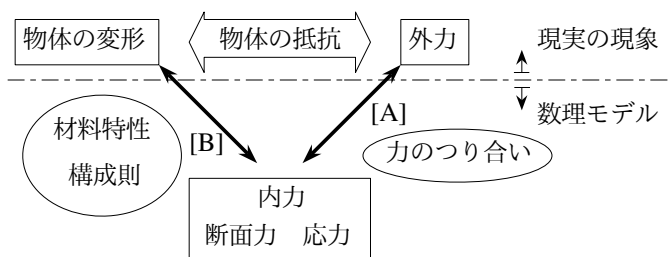


図3.7 物体の抵抗を力の次元で考えた内力という概念

と考えた方が扱い易いだろう。この箇条2.と3.については次の節で説明する。この節では連続体の中に生じる内力、つまり物体の抵抗力を一般的に定義しよう。第2章では主にトラス部材の応力（抵抗力）を、仮想的に部材を切断することによって可視化（外力と同じように）して考えたから、それほど抵抗なくその物理的な意味を想像・理解できたと思う。ここで扱う連続体の中の応力も、物体中に仮想的な切断面を考えることによって定義するが、それは初学者には難しいかもしれないが、少し我慢してじっくり取り組んで勉強して欲しい。難しくなったときは、トラスの軸力のことを思い出せば少しは理解が進むかもしれない。

¹¹ 本多勝一氏の表記法[187]による。

3.3.2 表面力ベクトルと応力テンソル

物体内部の抵抗力を可視化するために、トラス部材を途中で切断したのと同様に、まずは物体を真っ二つに切ってみよう。図3.8のように任意の単位法線方向 \mathbf{n} を持つ内部表面をそのような切断によって作ったとしよう。その内部表面の面積が A で、そこに抵抗するために発生しているであろう単位面積当たりの抵抗力ベクトルを \mathbf{T}_n とすると、外力とのつり合いは切断面より右側の物体 V_2 に対しては

$$\mathbf{T}_n A = \int_{S_2} \mathbf{F} dS + \int_{V_2} \mathbf{X} dV$$

となるはずだ。 \mathbf{F} は右側の物体の実際の表面 S_2 に作用した単位表面積当たりの外力であり、 \mathbf{X} は物体の切断面より右側の内部 V_2 に作用する単位体積当たりの外力である。この抵抗力 \mathbf{T}_n は第2章で導入した軸力等の断面力に相当する。ただし、ここでは次元は単位表面積当たりの力とする。この面積 A の「表面」というものが、物体の実際の表面ではなく、仮想的に（頭の中で）物体を部分的に切断して現れた表面を指すことには十分注意する必要がある。

上では第2章の断面力を一般化するために物体を2分するような大きな面 A を考えたが、連続体中の実際の内力は物体内で一様ではなく場所 \mathbf{x} の関数になるため、 A の上の内力も一般的には一様ではない。さらに物体内の内力も \mathbf{x} の関数であるから、局所的な点 \mathbf{x} 近傍における微分面積 dA 毎に内力を考える必要がある。そこで、図3.8の切断面上の2箇所と右部分 V_2 の中に3箇所例示したように、ある点近傍の内部微分表面要素 dA に生じた局所的な内力 $\mathbf{t}_n(\mathbf{x})$ に着目してみよう。この内力 \mathbf{t}_n は表面力と呼ばれる。そのカベクトルを表面力ベクトル¹²と呼ぶこともある。次元は圧力と同じで単位表面積当たりの力である。上で導入した断面力に相当する内力 \mathbf{T}_n は、真っ二つにした断面 A の平均的な表面力なので

$$\mathbf{T}_n = \frac{1}{A} \int_A \mathbf{t}_n dA$$

と考えればいい。

このように、ある物質点で定義した表面力はベクトルなのでもちろん三つの座標成分を持つはずだが、その同じ点を含む内部表面の向き \mathbf{n} を変更すると、その成分の値は違って来るだろう。つまり、表面力には、内部表面の向きの情報も含めて表現しなければならないことがわかる。そこで図3.9には簡単のために2次元で、ある「内部表面」 dA の近傍を描いた。この図の dA は物体内部の微分面積要素であることに注意すること。その単位法線ベクトルが \mathbf{n} である物体内部の任意の位置 \mathbf{x} に定義した微分表面要素に表面力 $\mathbf{t}_n(\mathbf{x})$ が発生している状況に対し、図示したような $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ で表示したその座標軸方向成分の単位表面積当たりの力成分を定義しよう。このとき σ_{11} と σ_{12} を定義した「辺」の面積が $n_1 dA$ であることに注意しよう。ここは初学者にはちょっと難しいからゆっくり考えて欲しい。さて、いずれの力も単位表面積当たりの力であることに注意すると、 x_1 と x_2 の座標軸方向の力のつり合いが

$$dA(t_n)_1 = n_1 dA \sigma_{11} + n_2 dA \sigma_{21}, \quad dA(t_n)_2 = n_1 dA \sigma_{12} + n_2 dA \sigma_{22}$$

¹² これを応力ベクトルと呼ぶこともあるが、次に定義する応力テンソルとの区別を明らかにするために、この文書ではそう呼ばないことにした。

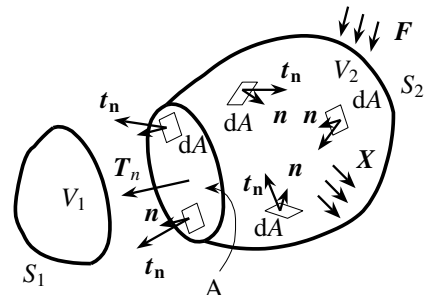


図3.8 内部表面と表面力ベクトル

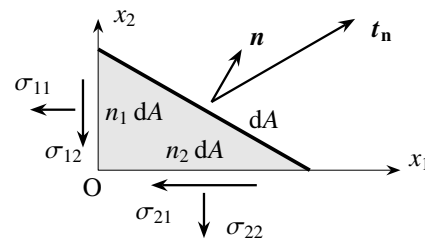


図3.9 内部表面上の表面力と応力テンソル

のように、それぞれの内力に面積を乗じて算定される力のつり合いになるから、結局、表面力ベクトルの各成分がその面の方向に依存した三つの成分 σ_{ji} を持つことになり

$$(t_n)_1 = n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21}, \quad (t_n)_2 = n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22}$$

という関係になる。つまり

$$(t_n)_i = \sum_{j=1}^2 n_j \sigma_{ji} \quad (i = 1, 2) \tag{3.18}$$

によって重要かつ基本的な内力成分 σ_{ij} を定義する。このように、表面力 $t_n(x)$ には面 n の情報と座標方向の圧力（応力）の情報の両方が含まれていることがわかる。この $\sigma(x)$ を応力テンソルと呼び、上のそれぞれの成分を応力テンソル成分と呼ぶ。3次元の場合に一般化すると

$$(t_n(x_1, x_2, x_3))_i = \sum_{j=1}^3 n_j(x_1, x_2, x_3) \sigma_{ji}(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.19}$$

が応力テンソルの定義式である。この定義式を **Cauchy** の定理と呼ぶこともある。この式 (3.19) を直接表記あるいは行列表記し

$$t_n(x) = n(x) \cdot \sigma(x), \quad \{t_n\} = \left(\sigma \right)^T \{n\}$$

と考え、応力テンソルをベクトル間の写像として定義する人もいるようだ。第1式のドットはベクトルの内積と同じようなアクションを示す。このように応力¹³はある面の外向き法線ベクトルと関連させて定義されるため、その正の向きは内部表面の向きに依存している。これについては次節で定義する。応力成分 σ_{ij} のうち、内部表面の法線方向 ($i = j$) 成分を直応力と呼び、接線方向 ($i \neq j$) 成分をせん断応力と呼ぶ。

ここまでの図 3.9 や式 (3.18) で用いた応力テンソルの成分の定義、つまり添え字の規則については、まだ明確にしていなかった。これは図 3.10 のようにするのが通例である。法線 n を持つ面に発生する表面力ベクトルを t_n と定義したが、特殊な例として座標の単位ベクトル方向を法線とする微分表面要素を物体内部に設定する。例えば e_2 方向あるいは e_3 方向を法線とする面に生じた表面力ベクトルを、図示したようにそれぞれ t_2 あるいは t_3 と表そう。そこで、このベクトルの各座標方向成分を

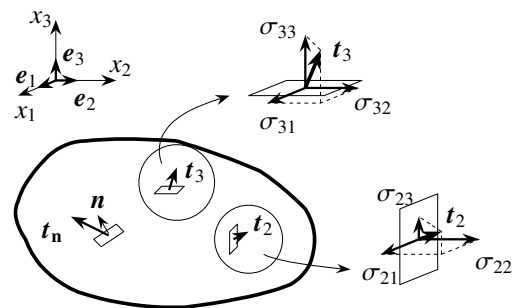


図 3.10 応力テンソル成分の定義

$$t_2 = \sum_{j=1}^3 \sigma_{2j} e_j, \quad t_3 = \sum_{j=1}^3 \sigma_{3j} e_j$$

のように分解して、その成分を σ_{2j} あるいは σ_{3j} ($j = 1, 2, 3$) と定義することにする。すなわち、一般的には

$$t_i(x) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(x) e_j \tag{3.20}$$

となる。したがって σ_{ij} の添え字のうち、前の添え字 i が表面力ベクトルを定義する物体内の面の法線方向を、後ろの添え字 j が応力成分の力の向きを表している¹⁴ことに注意すべきである。もちろん後述のように、多くの場合応力テンソルは対称テンソルなので、ここに明記したような添え字の区別が重要になることは無いが、

¹³ この文書では「応力度」という不必要な表現は用いない。応力そのものが元々単位面積当たりの向きを持った intensity であるから、それを積分した断面力等は「一般化された応力」あるいは「合応力」と呼ばれれば済むからである。同じような意味で、よく「応力ベクトル」と呼ばれる量は英語の 'traction' なので、「表面力ベクトル」と呼ぶことにしている。

¹⁴ 教える機関や教科書によっては逆の順番で定義されていることもあるので注意すること。多分、京大系と東大系が逆だったと思う。

偶応力や分布外力モーメントが存在する場合 [62], あるいは大変形問題を対象とする場合には, この区別が重要になることがあるので十分注意する必要がある。

ところで, ストレス (応力) という言葉について文献 [122] に面白い記述がある。それを引用すると次のように (原文縦書き) なる。

まず、ストレスとは何か。言葉本来の意味としては、刺激、もしくは固くしめつけることでありますね。〈中略〉

力学のほうでは、物体に外から力が加えられた時、その内部に生じる歪^{ゆが}みをストレスと呼んでおりますね。

その内部に生じる歪みという意味を、カナダの病理学者ハンス・セリエが医学に導入いたしました。これがストレス学説でありまして、〈後略〉

これは確かに間違った記述である。ただ我々にとっても医学用語としての「ストレス」の感覚的認識は、身体の中の何らかの (精神的なものも含めて) 歪みになってないだろうか。筋肉の動作や図 3.7 を見ると、もしかしたらそれが本質かもしれない。実際には変形を伴わない応力には意味が無く、裏返して考えると『「力」の次元を持った「変形 (歪^{ゆが})」』が応力の真義なのかもしれない。呵呵。閑話休題。☆

3.3.3 応力で表したつり合い

上式 (3.19) で定義された物体内部の応力成分は, 外力が作用して静止した状態の物体内のすべての「点」においてもつり合い状態にあるはずだ。それが局所的なつり合いだ。そこで簡単のために再度 2 次元で描いた図 3.11 を用いて, そのつり合い式を誘導する。前節で定義したように応力は作用面外向き方向が正であったため, この図のように, 面の外向き法線が座標の正方向を向いている面 (正の面) では座標の正方向成分を正の応力成分とする。逆に負の面では作用反作用の原理から, 座標の負方向成分を正の応力成分と定義する。「表面」が指定されて初めて定義できるはずの応力が任意の物質「点」 (面積が無い)

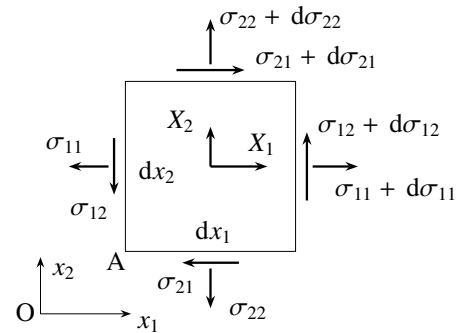


図 3.11 応力テンソル成分と外力の関係

でつり合うというところが, 連続体力学を理解するときの次の難所だろうが, この図のように小さい領域を考えたあとに dx_i を零にする極限をとるという, 数理モデル上の標準的な手法だということを理解して欲しい。

応力が単位面積当たりの力であることを念頭に置いて, この図の奥行き方向の厚さを 1 だと考えれば, 例えば x_1 方向の力のつり合いは

$$dx_2 (\sigma_{11} + d\sigma_{11}) - dx_2 \sigma_{11} + dx_1 (\sigma_{21} + d\sigma_{21}) - dx_1 \sigma_{21} + X_1 dx_1 dx_2 = 0$$

であることから, $dx_1 dx_2$ で除して $dx_i \rightarrow 0$ とすると, つり合い式は

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + X_1 = 0$$

となる。ここに X_1 は体積力ベクトル \mathbf{X} の x_1 方向成分で, 単位体積当たりに作用する力の次元を持ち, 例えば自重のようなものをモデル化したものだ。 x_2 方向も同様に誘導できることから, 結局

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3.21)$$

が2次元の応力成分で表したつり合い式になる。3次元の場合は

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + X_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{直接表記すると} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.22a, b)$$

がそのつり合い式である。ここの応力成分の添え字の順番にも注意して欲しい。多くの文献では、この順番が逆になっているが、それは次に求めるモーメントのつり合いが成立する場合にのみ正しい。

一方、図 3.11 の正方形の左下角の点 A 回りのモーメントのつり合いを考えると

$$\begin{aligned} & \frac{dx_1}{2} \{dx_1 (\sigma_{22} + d\sigma_{22}) - dx_1 \sigma_{22}\} - \frac{dx_2}{2} \{dx_2 (\sigma_{11} + d\sigma_{11}) - dx_2 \sigma_{11}\} \\ & - dx_2 dx_1 (\sigma_{21} + d\sigma_{21}) + dx_1 dx_2 (\sigma_{12} + d\sigma_{12}) + \frac{dx_1}{2} dx_1 dx_2 X_2 - \frac{dx_2}{2} dx_1 dx_2 X_1 = 0 \end{aligned}$$

となることから、辺々 $dx_1 dx_2$ で除して $dx_i \rightarrow 0$ とすると $\sigma_{21} = \sigma_{12}$ となる。すなわち3次元のモーメントのつり合い式は

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sigma_{ji}(\mathbf{x}) \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3) \quad (3.23)$$

である。式 (3.6) で定義されたひずみテンソル成分はその定義によって自動的に対称になっていたが、応力テンソル成分はモーメントのつり合いから対称になると結論付けられる。ただし、大きな変形を扱う場合に用いる応力テンソルには対称にはならないもの（第 1 Piola-Kirchhoff 応力 [175]）も存在するし、偶応力や分布外力モーメントが存在する場合 [62] には式 (3.23) は成立しないので注意が必要である。

3.3.4 境界条件

図 3.8 のような物体のつり合い状態を解析するには式 (3.22) の微分方程式を物体内 V で解けばいいわけ¹⁵だが、その場合には、その物体の外部表面 $S \equiv \partial V$ で境界条件を適切に与える必要がある。そうでないと解が唯一には決まらないか、あるいは存在しなくなるからだ。境界条件には主に2種類の条件がある。一つはその表面の運動を規定するものであり、もう一つはその表面に作用している外力を与えるものである。前者は表面の変位を与えればいいから変位の境界条件と呼ばれ¹⁶れ、後者は表面近傍で表面¹⁷外力ベクトル \mathbf{F} と応力がつり合うようにすればいいから力の境界条件と呼ばれ¹⁸る。具体的にある適切な座標系成分を用いた式で表現すると、表面の $i = 1, 2, 3$ 成分を用いた

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{あるいは} \quad F_i = \sum_{j=1}^3 n_j \sigma_{ji} \quad (3.24a, b)$$

のどちらかが与えられることになる。ここに \bar{u}_i は境界で与える変位成分の値である。また式 (3.24b) は、内部の仮想表面で立てた Cauchy の定理式 (3.19) を外部（境界）表面で立て直したもので、この \mathbf{n} は境界表面の外向き法線単位ベクトルである。ただし、 $\bar{\mathbf{u}}$ も \mathbf{F} も全座標成分を同時に与える必要は無いが、解の存在と唯一性の条件から上式の両方の同じ座標成分を同時に規定することはできない。図 3.12 の表面 S_2 では剛板を矢印の方向に強制変位させた状況なので、式 (3.24a) のすべての i 成分が与えられた場合である。特に固定 ($\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$) された表面 S_1 では式 (3.24a) の特殊な場合の $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ となる。また表面 S_3 の条件が式 (3.24b) である。これに

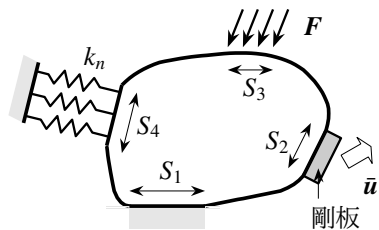


図 3.12 代表的な境界条件

¹⁵ 次節の構成方程式が定義されていないのでまだ解ける準備は整っていないし、変位の境界条件の導入には疑問を感じるかもしれないが、境界条件だけは完全な形で定義しておく。境界値問題については第 3.6 節で例示する。

¹⁶ 幾何学的境界条件あるいは Dirichlet 条件または第 1 種条件・本質的境界条件とも呼ぶ。

¹⁷ 物体表面に作用する外力と内部表面の表面力とを混同することは無いので、簡単のために外力も表面力と呼ぶことが多い。

¹⁸ 力学的境界条件あるいは Neumann 条件または第 2 種条件・自然境界条件とも呼ぶ。

対し, $S_1 \sim S_4$ 以外の表面では変位も外力も規定されていないので, 式 (3.24b) の特殊な場合の $\sum_{j=1}^3 n_j \sigma_{ji} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) で規定される。

式 (3.24) の二つが基本的な境界条件であるが, それを組み合わせられた条件もあり得る。それは第3種の境界条件と呼ばれ¹⁹ることがあり, 弾性的に支持されている表面の条件がその代表である。具体例は図 3.12 の表面 S_4 の状況のように, 単位面積当たりの法線方向 \mathbf{n} の反力バネ定数が k_n のバネを壁との間に挟んだもので

$$k_n u_n + t_n = 0, \quad t_t = 0, \quad u_n \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad t_n \equiv \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t} \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad t_t \equiv \mathbf{t} - t_n \mathbf{n} \quad (3.25a, b, c, d, e, f)$$

あるいは

$$k_n \sum_i u_i n_i + \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji} n_i = 0, \quad \sum_j n_j \sigma_{ji} - n_i \sum_j \sum_k n_j \sigma_{jk} n_k = 0$$

という条件式で規定することができる。ここに u_n は表面の外向き法線 \mathbf{n} 方向の変位成分であり, t_n は表面力 \mathbf{t} の外向き法線方向成分である。また t_t は \mathbf{t} の接線方向成分である。

演習問題 3-2

- 式 (3.25) の第3種の境界条件で表現できる境界表面の弾性壁に摩擦があり, その表面の摩擦抵抗を単位面積当たりの接線方向の反力バネ定数 k_t でモデル化できるとき, 接線方向の境界条件を求めよ。

3.3.5 外力のつり合いと内力のつり合い — 巨視的なつり合いと局所的なつり合い

式 (3.22) (3.23) は物体中のある点²⁰で成立する内力のつり合い式なので, この節タイトルに「局所的なつり合い」と書いたが, 初学者には少しわかり難かったかもしれない。そこで第2章で静定トラスや梁を解いたときにまず支点反力を求めたように, 外力同士の力のつり合いを考えて, それと内力 (応力) のつり合い式 (3.22) (3.23) との関係を調べておこう。ある物体の表面 S に単位表面当たり \mathbf{F} という外力表面力 (反力も零外力も含む) が作用し, 物体内部 V の単位体積当たりの分布外力が \mathbf{X} である場合, 物体全体の外力同士の巨視的なつり合い式は

$$\int_S \mathbf{F} dS + \int_V \mathbf{X} dV = \mathbf{0} \quad \text{つまり} \quad \int_S F_i dS + \int_V X_i dV = 0$$

である。積分で書かれるとわからないかもしれないが, 静定トラスや梁の反力を求めるときの力のつり合い式のことである。この第1項の F_i に力の境界条件式 (3.24b) を代入すると

$$\int_S \sum_j n_j \sigma_{ji} dS + \int_V X_i dV = 0$$

となる。第1項に任意のテンソル成分 $T_{mijk\dots}$ に対する Gauss の発散定理

$$\int_S \sum_m n_m T_{mijk\dots} dS = \int_V \sum_m \frac{\partial T_{mijk\dots}}{\partial x_m} dV \quad (3.26)$$

を適用すると, 上式は

$$\int_V \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV + \int_V X_i dV = 0 \quad \rightarrow \quad \int_V \left\{ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i \right\} dV = 0$$

¹⁹ Robin 条件あるいは第3種条件または混合条件とも呼ぶ。

²⁰ 「点」で応力を定義したのだろうか・・・と悩むと眠れなくなるのでやめた方がいい。例えば図 3.11 は「点」ではなかったのではないかと思っただ人は実は正しい。しかしそのあと, $dx_i \rightarrow 0$ という操作をして初めて力のつり合い式を微分方程式で表すことができたことを思い出せば, この「点」の意味が少しはわかるかもしれない。否! 原子と原子の間で $dx_i \rightarrow 0$ になると? うん, そこが連続体モデル。

となり、被積分関数は応力のつり合い式(3.22)に一致する。つまり、式(3.22)は物体 V の中の任意の点 \mathbf{x} において局所的に成立すべきつり合い式であることがわかる。

同様に、全外力のモーメントの巨視的なつり合いは

$$\int_S \mathbf{x} \times \mathbf{F} dS + \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{X} dV = \mathbf{0} \quad \text{あるいは} \quad \int_S \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} x_j F_k dS + \int_V \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} x_j X_k dV = 0$$

と表される。ここに ϵ_{ijk} は交代記号(テンソル成分ではない)と呼ばれ

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{もし}(ijk) \text{が}(123) \text{の偶置換である場合} \\ -1 & \text{もし}(ijk) \text{が}(123) \text{の奇置換である場合} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (3.27)$$

という値を持つ。偶置換とは (ijk) の組が (123) (231) (312) の順の組のいずれかの場合で、奇置換は (321) (213) (132) の順の組のいずれかの場合である。これはベクトルの外積を成分表示する場合に便利な記号である。さて、上式第1項の F_i に再度力の境界条件式(3.24b)を代入すると

$$0 = \int_S \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ijk} x_j n_l \sigma_{lk} dS + \int_V \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} x_j X_k dV$$

となるので、ここでもまた式(3.26)のGaussの発散定理を第1項に適用すれば

$$= \int_V \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j \sigma_{lk}) dV + \int_V \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} x_j X_k dV$$

すなわち

$$= \int_V \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} \left(\sigma_{jk} + \sum_l x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \right) dV + \int_V \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} x_j X_k dV$$

を得る。この第1項の被積分関数の第2項につり合い式(3.22)を代入すると、結局

$$= \int_V \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} (\sigma_{jk} - x_j X_k) dV + \int_V \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} x_j X_k dV = \int_V \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV$$

を得る。さらに交代記号の性質を活かせば

$$\begin{aligned} &= \int_V \sum_j \sum_k \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \frac{1}{2} \epsilon_{ikj} \sigma_{kj} \right) dV = \int_V \sum_j \sum_k \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} \right) dV \\ &= \int_V \sum_j \sum_k \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\sigma_{jk} - \sigma_{kj}) dV \end{aligned}$$

となることから、応力で表したモーメントの局所的なつり合い式(3.23)を被積分関数に得る。このように、「外力の巨視的なつり合い式」を表す積分式の被積分関数が実は「内力の局所的なつり合い式」であることから、物体中のある点 \mathbf{x} (ある微分体積 dV)のつり合い式が式(3.22)(3.23)であることも少しは理解できたのではないだろうか。

3.3.6 応力の主方向と不変量

(1) 主応力

ひずみの説明に使った写真3.2からは、ひずみテンソルには主方向があり、任意のひずみ状態はその主方向への三つの伸び縮み成分だけで表現できることがわかっていた。それならば同様に、応力テンソルにもその主

方向と主応力がありそうだ。つまり、ある向き内部表面にはせん断応力成分は発生しておらず、その面の法線方向のみの直応力成分（圧縮や引張）しか生じていない面がありそうだ。そのような面の法線方向を応力の主方向と呼んでいる。主方向の単位ベクトルを $\tilde{\mathbf{n}}$ としたとき、その面の表面力はこの法線方向と平行になるはずだから、式(3.19)より

$$\mathbf{t}_n \parallel \tilde{\mathbf{n}} \rightarrow (t_n)_i = \sigma \tilde{n}_i \rightarrow (t_n)_i = \sum_{j=1}^3 \tilde{n}_j \sigma_{ji} = \sigma \tilde{n}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

という関係にあるはずだ。ここに \parallel は平行を意味する記号であり、スカラー係数 σ はその主方向の応力成分の大きさを主応力と呼ばれる。すなわち、上式から

$$\left(\sigma \right)^T \left\{ \tilde{\mathbf{n}} \right\} = \sigma \left\{ \tilde{\mathbf{n}} \right\}$$

あるいは

$$\sum_j \tilde{n}_j (\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ji}) = 0 \rightarrow \left(\left(\sigma \right)^T - \sigma \left(I_3 \right) \right) \left\{ \tilde{\mathbf{n}} \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

を満足する主方向 $\tilde{\mathbf{n}}$ と主応力 σ が存在すると考えられる。ここに $\left(I_3 \right)$ は 3×3 の単位行列である。式(3.23)のモーメントのつり合いより、応力を行列表示したものは対称行列になることから、上の式の一番右の行列表示式では転置記号が要らなくなって

$$\left(\left(\sigma \right) - \sigma \left(I_3 \right) \right) \left\{ \tilde{\mathbf{n}} \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (3.28)$$

と書いてもいい。この式(3.28)は行列 $\left(\sigma \right)$ の固有値を σ としたときの標準的な固有値問題を形成しており、その固有ベクトル方向が主方向になっていることがわかる。したがって主応力 σ (固有値)は

$$\det \left(\left(\sigma \right) - \sigma \left(I_3 \right) \right) = 0 \quad (3.29)$$

で決定され、その結果を上式(3.28)に代入し直せば主方向 $\tilde{\mathbf{n}}$ を求めることができる。 $\left(\sigma \right)$ が対称行列なので、一般に主応力は実数で三つ存在する。

例えば2次元で計算してみよう。式(3.28)は

$$\left(\left(\begin{array}{cc} \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{array} \right) - \sigma \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \right) \left\{ \begin{array}{c} \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \tilde{\mathbf{n}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_2 \end{array} \right\}, \quad (\tilde{n}_1)^2 + (\tilde{n}_2)^2 = 1$$

となり、式(3.29)の最終的な形

$$\sigma^2 - (\sigma_{11} + \sigma_{22})\sigma + (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21}) = 0 \quad (3.30)$$

が二つの主応力 σ_I, σ_{II} を決定する。通常、正の大きい方から順番に I, II とする。これを上式に代入し直せば

$$\frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma - \sigma_{22}} = \frac{\sigma - \sigma_{11}}{\sigma_{21}} \quad (3.31)$$

という関係になるので、このいずれかの式の σ に主応力 σ_I あるいは σ_{II} を代入すれば、それぞれの主方向 $\tilde{\mathbf{n}}_I, \tilde{\mathbf{n}}_{II}$ の座標成分を求めることができる。ここでは $\left\{ \tilde{\mathbf{n}} \right\}$ を単位ベクトルとしているので、唯一に決定することができる。

もし主応力を決定する式(3.29)が重根を持つ場合、少なくとも2方向の主応力が等しくなり、主方向は唯一には決定できなくなる。2次元の場合のひずみで考察するとわかり易いが、そのような場合には写真3.2の変

形後の楕円が円のままになっていることに相当する。それはすべての方向に一樣に伸びあるいは縮みが生じている状態に等しい。そして円の場合には、楕円の長短軸に相当する主方向を任意の（しかも直交しなくてもいい）方向にとることができるので、その主方向は唯一には決定できないわけである。応力の場合も同様で、重根の場合（面内あるいは3次元的に等方応力状態：静水圧状態が3次元等方状態の例）には、平面的か3次元的に一樣な引張か圧縮が生じているため、主方向を唯一には決定できない。

さて、異なる二つの主応力と主方向は例えば行列表示ではそれぞれ

$$\left(\sigma \right)^T \left\{ \tilde{n}_I \right\} = \sigma_I \left\{ \tilde{n}_I \right\}, \quad \left(\sigma \right)^T \left\{ \tilde{n}_{II} \right\} = \sigma_{II} \left\{ \tilde{n}_{II} \right\}$$

を満足している。この第1式に左から $\left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T$ を、第2式に左から $\left\{ \tilde{n}_I \right\}^T$ を乗じると、それぞれ

$$\left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left(\sigma \right)^T \left\{ \tilde{n}_I \right\} = \sigma_I \left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left\{ \tilde{n}_I \right\}, \quad \left\{ \tilde{n}_I \right\}^T \left(\sigma \right)^T \left\{ \tilde{n}_{II} \right\} = \sigma_{II} \left\{ \tilde{n}_I \right\}^T \left\{ \tilde{n}_{II} \right\} \quad (*)$$

となる。これはスカラーなので、第2式の転置は行列演算の規則を用いれば

$$\left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left(\sigma \right) \left\{ \tilde{n}_I \right\} = \sigma_{II} \left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left\{ \tilde{n}_I \right\}$$

とも書くことができるから、上式(*)₁からこの式を辺々引き算して、応力の対称性を利用すると次式のように左辺は零になる。よって、以下に示すようにその右辺も零になるので

$$\left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left(\sigma \right)^T \left\{ \tilde{n}_I \right\} - \left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left(\sigma \right) \left\{ \tilde{n}_I \right\} = (\sigma_I - \sigma_{II}) \left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left\{ \tilde{n}_I \right\} \rightarrow 0 = (\sigma_I - \sigma_{II}) \left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left\{ \tilde{n}_I \right\}$$

という関係を得る。したがって、主応力同士が異なる $\sigma_I \neq \sigma_{II}$ の場合には

$$0 = \left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left\{ \tilde{n}_I \right\}$$

が結論付けられる。つまり異なる主応力に対応する主方向同士は直交している。3次元の一般的な表現をするなら、異なる主応力に対応する主方向同士は

$$\tilde{n}_i \cdot \tilde{n}_j = 0 \quad (i \neq j; \quad i, j = I, II, III) \quad (3.32)$$

を満足し、お互いに直交する。ただし、二つの主応力が同じ場合には、主方向を唯一に定めることはできないが、直交する方向に選ぶことはできるだろう。

(2) 応力行列の一表現

式(3.28)をじいっと眺めていると、次のように応力行列を表示できることがわかる（人はたいしたものです。第1著者は逆算。呵呵）。テンソルのスペクトル表示と呼ばれることもある。

$$\left(\sigma \right) = \sum_{i=I}^{III} \sigma_i \left\{ \tilde{n}_i \right\} \left\{ \tilde{n}_i \right\}^T = \left(\left(\left\{ \tilde{n}_I \right\} \right) \left(\left\{ \tilde{n}_{II} \right\} \right) \left(\left\{ \tilde{n}_{III} \right\} \right) \right) \begin{bmatrix} \sigma_I & \mathbf{0} \\ & \sigma_{II} \\ \mathbf{0} & & \sigma_{III} \end{bmatrix} \left(\left(\left\{ \tilde{n}_I \right\} \right) \left(\left\{ \tilde{n}_{II} \right\} \right) \left(\left\{ \tilde{n}_{III} \right\} \right) \right)^T \quad (3.33)$$

つまり、式(3.33)の両辺に $\left\{ \tilde{n}_j \right\}$ を乗じると

$$\left(\sigma \right) \left\{ \tilde{n}_j \right\} = \sum_{i=I}^{III} \sigma_i \left\{ \tilde{n}_i \right\} \left\{ \tilde{n}_i \right\}^T \left\{ \tilde{n}_j \right\}$$

となるものの、右辺の右端の内積は式(3.32)の直交性を考えると $i = j$ のとき以外は零になるため、結局上式は

$$\left(\sigma \right) \left\{ \tilde{n}_j \right\} = \sigma_j \left\{ \tilde{n}_j \right\} \quad (j = \text{I, II, III})$$

となり、式(3.28)に帰着する。意味を考えてみよう。

応力テンソルは六つの座標成分の組で表すこともできるが、その六つの値は座標系のとり方によって違ってくる。しかし上式のように、三つの固有値とそれぞれに対応する三つの主方向ベクトル（三つの成分が独立した単位直交ベクトルの組）との組み合わせでも表現できるということは、座標系とは全く無関係な六つの量で応力テンソルが決定できることを示している。これが「テンソル」である由縁ではないだろうか。あるいは式(3.33)を、三つの基底のテンソル積 $\left\{ \tilde{n}_i \right\} \left\{ \tilde{n}_i \right\}^T$ で応力テンソルを分解したときのそれぞれの成分が主応力であると見る人もいるようだ。特に等方材料の抵抗則（応力ひずみ関係）を考える場合には、それは本質的に座標系とは無関係でなければならない²¹から、主応力や主ひずみを用いることもある。

(3) 応力の不変量

上で見たように、ひずみテンソルと同様、応力テンソル成分は用いる座標系のとり方に依存して値は違ってくる。しかし、ある応力状態に対して、その主応力はその物質点における抵抗力の物理的な特性の一つであって、座標のとり方とは全く関係の無い値と向きを持っている。したがって、上式(3.30)の2次方程式の根と係数の関係から得ることができる

$$\text{I}(2 \text{ 次元})_\sigma \equiv \sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_{\text{I}} + \sigma_{\text{II}}, \quad \text{II}(2 \text{ 次元})_\sigma \equiv \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21} = \sigma_{\text{I}}\sigma_{\text{II}} \quad (3.34a, b)$$

で定義した二つの量も、座標系に依存しない量になる。このような量を不変量と呼んでいる。

3次元の一般的な表現を示すと、主応力を決定する式は

$$\sigma^3 - \text{I}_\sigma \sigma^2 + \text{II}_\sigma \sigma - \text{III}_\sigma = 0 \quad (3.35)$$

と書け、それぞれ

$$\text{I}_\sigma = \text{I}_1 \equiv \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} = \text{tr} \left(\sigma \right) = \sigma_{\text{I}} + \sigma_{\text{II}} + \sigma_{\text{III}}, \quad (3.36a)$$

$$\text{II}_\sigma = \text{I}_2 \equiv \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} \right)^2 - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \sigma_{ji} \right\} = \sigma_{\text{II}} \sigma_{\text{III}} + \sigma_{\text{III}} \sigma_{\text{I}} + \sigma_{\text{I}} \sigma_{\text{II}}, \quad (3.36b)$$

$$\text{III}_\sigma = \text{I}_3 \equiv \det \left(\sigma \right) = \sigma_{\text{I}} \sigma_{\text{II}} \sigma_{\text{III}} \quad (3.36c)$$

が応力の第1~3不変量である。第1不変量は行列表示したときの跡に相当する。これに対応させて、ひずみの不変量も定義できる。このような不変量も、特に等方な材料の抵抗則（応力ひずみ関係）を表現するのに適しており、実際に塑性の基礎式でも用いられている。

演習問題 3-3

3. 次の応力状態(?)における主応力と主方向を求めよ。

$$\left(\sigma \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ MN/m}^2$$

²¹ もちろん、内部に微視構造を持つような異方性材料の場合はその限りではない。

(4) 再び、主ひずみと主方向

さて第3.2.4節では、主ひずみとその方向についての概念だけの説明で終わっていたので、ここでは主応力と同様の求め方と意味を追加説明しておく。ひずみの場合も応力の場合の式(3.28)と同様

$$\left(\left(\epsilon \right) - \epsilon \left(I_3 \right) \right) \left\{ \tilde{n} \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (3.37)$$

のような固有値問題の定式化が可能であり、これを解くことによって三つの固有値つまり主ひずみ ϵ_i とそれぞれに対応した固有ベクトルつまり主方向 \tilde{n}_i ($i=I, II, III$)が求められる。一旦主ひずみと主応力が求められれば、応力の式(3.33)と同様のスペクトル表示ができ

$$\left(\epsilon \right) = \left(\left\{ \tilde{n}_I \right\} \left\{ \tilde{n}_{II} \right\} \left\{ \tilde{n}_{III} \right\} \right) \begin{bmatrix} \epsilon_I & \mathbf{0} \\ \epsilon_{II} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \epsilon_{III} \end{bmatrix} \left(\left\{ \tilde{n}_I \right\} \left\{ \tilde{n}_{II} \right\} \left\{ \tilde{n}_{III} \right\} \right)^T \quad (3.38)$$

という関係が成立する。そして、式(3.13)のひずみ成分の座標変換則を念頭に置いて上式を眺めると、右辺の主ひずみで定義される対角行列の前後にある行列は単なる座標変換行列と解釈できる。つまり

$$\left(T \right) = \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \tilde{n}_I \\ \tilde{n}_{II} \\ \tilde{n}_{III} \end{array} \right] \end{pmatrix}$$

がその座標変換行列になる。結局このひずみ状態は、その変換された座標軸3方向への単純な伸び縮み ϵ_i ($i=I, II, III$)だけの変形状態と等価であることを示している。この単純な伸び縮みが主ひずみであり、変換された座標方向が主方向になる。なお、ひずみの場合も応力と同様の不変量を定義でき、特に第1不変量 I_ϵ は式(3.14)の体積ひずみ

$$\Delta = I_\epsilon \equiv \sum_k \epsilon_{kk} = \epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III} \quad (3.39)$$

である。

3.3.7 応力成分の座標変換

応力テンソルもひずみテンソルと同様、同じ状態であってもその座標方向成分は、異なる座標系に対しては異なる値を持つ。式(3.11)の座標変換行列の定義から

$$\mathbf{e}_k = \sum_i T_{ik} \bar{\mathbf{e}}_i, \quad \bar{\mathbf{e}}_k = \sum_i T_{ki} \mathbf{e}_i, \quad \bar{n}_l = \sum_j T_{lj} n_j$$

という関係があるので、式(3.19)のCauchyの定理より

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n &= \sum_i (t_n)_i \mathbf{e}_i = \sum_i \left\{ \sum_j n_j \sigma_{ji} \right\} \mathbf{e}_i \\ &= \sum_k (\bar{t}_n)_k \bar{\mathbf{e}}_k = \sum_k \left\{ \sum_l \bar{n}_l \bar{\sigma}_{lk} \right\} \bar{\mathbf{e}}_k = \sum_i \left\{ \sum_j n_j \left(\sum_k \sum_l \bar{\sigma}_{lk} T_{lj} T_{ki} \right) \right\} \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

という関係を得る。結局ひずみの座標変換則と同じく

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \bar{\sigma}_{kl} T_{ki} T_{lj} \quad (3.40)$$

を得る。あるいは行列表示して

$$\left(\sigma \right) = \left(T \right)^T \left(\bar{\sigma} \right) \left(T \right), \quad \left(\bar{\sigma} \right) = \left(T \right) \left(\sigma \right) \left(T \right)^T \quad (3.41a, b)$$

と表現できる。2階のテンソル成分はすべて同じ座標変換則に従う。

この応力の座標変換則を踏まえると、前節の主ひずみの場合と同様式(3.33)の意味はもう少し理解し易くなるかもしれない。その式(3.33)の左右から、主方向ベクトルでできた座標変換行列を乗じると

$$\left(\left\{ \begin{array}{c} \tilde{n}_I \\ \tilde{n}_{II} \\ \tilde{n}_{III} \end{array} \right\} \right)^T \left(\sigma \right) \left(\left\{ \begin{array}{c} \tilde{n}_I \\ \tilde{n}_{II} \\ \tilde{n}_{III} \end{array} \right\} \right) = \begin{bmatrix} \sigma_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_{II} \\ \mathbf{0} & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

という表現も可能になる。左辺は、応力テンソルの主方向を基底ベクトルとする座標方向に、その応力テンソルを変換したものだ。右辺は、その座標系では直応力成分しか生じていないことを示している。この式²²の方が、主応力の意味を理解し易い人は多いかもしれない。

演習問題 3-4

4. x_1 方向の直応力が $\sigma_{11} = \sigma_0$ で他のすべての応力成分が零である 1 軸引張状態を、 x_3 軸の反時計回りに 45 度回転させた座標系の成分で表示せよ。

3.3.8 静水圧成分とせん断応力成分

ひずみテンソルが体積ひずみ成分と偏差ひずみ成分（せん断ひずみ成分）に分解できたように、応力テンソルも、平均応力と偏差応力の 2 成分に分解できる。それを定義しておこう。まず、平均応力を

$$\sigma_{AVE} \equiv \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} \mathbf{I}_\sigma \quad (3.42)$$

で定義する。引張を正にした静水圧と考えていい。つまり、水中のある深さにおける応力状態はすべての方向から同じ圧力を受けていて、それを静水圧と称していることから、この定義がある。式(3.36)より、平均応力の 3 倍は応力の第 1 不変量である。

応力テンソル成分からこの平均応力成分を取り除いた部分を、式(3.15)と同様偏差応力テンソル成分と呼び

$$\sigma'_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \sigma_{AVE} \delta_{ij} \quad (3.43)$$

で定義する。偏差ひずみと同様、この偏差応力テンソル成分もある物質点に発生している抵抗力のうちのせん断応力成分に相当するが、それについては次節の式(3.53)(3.54)前後でも具体的に説明する。

3.4 変形と内力の関係 — 材料特性の記述の仕方

3.4.1 構成方程式

さて図 3.7 を用いて説明したように、材料の抵抗特性を変形そのものではなく抵抗力という内力を通して表現するために、前節では応力という概念を導入した。したがって、材料本来の変形による抵抗特性を、この内力と変形すなわち応力とひずみの関係で表すことができるようになった（図 3.7 の左側の斜め矢印 [B]）。材料

²² 大学 1 年の線形代数の講義で「行列の対角化」といったことを習ったと思うが、ひずみの場合の式(3.38)と同様、まさにこの式もそれに相当する。抽象的な数学の講義は難しかっただろうが、本当は大事なことなのであり、物理的な意味もあるのだ。

特性を表すこのような関係式を構成方程式あるいは構成則と呼ぶ。コンクリート屋さんは随分前からだが、近年では鋼構造解析屋さんの間でも、この「構成関係」という言葉を材料本来の特性のみを記述するものとしてではなく、構造系の見かけ上の抵抗力（合応力）と変形の関係に対しても頻繁に用いるようになってきているので、初学者は注意しないといけない。終局強度解析に断面力を用いるからだろうが、どの部分が系の境界値問題としての挙動で、どの部分が材料本来の特性なのかについて、常に頭の中では整理・区別しておくことが重要である。この節では本質的な構成則つまり材料本来の抵抗力の記述法について説明する。

3.4.2 Hooke の等方弾性体

(1) Hooke の法則

最も基本的な材料特性は、理科でもよくモデルとして用いたバネのように、外力を与えて変形させたあとで外力を取り除くと元の形に完全に戻るような性質だろう。そういった可逆的な材料特性を弾性と呼んでいる。さらに抵抗力が変形に線形比例して生じる場合には線形弾性と呼ぶ。また、例えば引張った方向によらずその抵抗特性が同じになる等、材料特性が方向性を持たない性質を等方性と呼ぶ。

この最も単純で基本的な等方弾性体の主な変形抵抗特性は、第 3.2.6 節で定義したような、i) 体積変形による抵抗と、ii) せん断変形による抵抗とに分けて表現できる、とは考えられないだろうか。つまり、まず式 (3.14) の体積ひずみに比例して式 (3.42) で定義した平均応力が生じ、あるバネ定数 K を通して

$$\sigma_{\text{AVE}} = K \Delta \quad (3.44)$$

という抵抗特性を持つと考えるのである。このバネ定数 K は体積弾性係数と呼ばれる材料定数である。さらにせん断変形についても、式 (3.15) (3.43) で定義されたひずみと応力の偏差成分同士が、等方性のためにどの成分の間でも同じ比例関係にあるものとしてモデル化する。つまり、あるバネ定数 G を通して

$$\sigma'_{ij} = 2G \epsilon'_{ij} \quad (3.45)$$

という抵抗特性を持つと考えるのだ。こちらのバネ定数 G はせん断弾性係数と呼ばれる材料定数である。

式 (3.44) (3.45) をそれぞれ式 (3.43) の右辺と左辺に代入し、さらに式 (3.15) を考慮して整理すると、応力ひずみ関係を

$$\sigma_{ij} = 2G \epsilon_{ij} + \left(K - \frac{2G}{3} \right) \delta_{ij} \Delta = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk} \quad (3.46)$$

と書くことができる。ここに δ_{ij} は式 (3.9) で定義した Kronecker のデルタであり、 μ と λ は

$$\mu = G, \quad \lambda = K - \frac{2G}{3} \quad (3.47a, b)$$

と定義され、Lamé 定数と呼ばれている。このような応力ひずみ関係を Hooke の法則と呼ぶ。構造力学ではよく Young 率²³ E と Poisson 比 ν の方を用いるので、上で用いた定数との主な関係を示しておく。

$$E = \frac{9KG}{3K + G} = 2G(1 + \nu), \quad \nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} = \frac{E}{2G} - 1, \quad \lambda = \frac{2G\nu}{1 - 2\nu}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.48a, b, c, d)$$

²³ 道路橋示方書 [176] で「Young 係数」を使っているからだろうが、某検索からの印象では、それは主に建築・木材・コンクリート・橋梁の分野の用語で、工学全般では「Young 率」の方が多そうだ。確かにせん断弾性係数との整合性からは「係数」の方に分がありそうだが、より広い分野の歴史的な呼び方は「率」だろう。そのせん断弾性係数も古くは「剛性率」とか「せん断弾性率」とも呼んでいた。著者が「応力度」を嫌う理由は同じ人が「応力」も使うからであって、歴史的に古い用語だから嫌いなわけではない。現在でも広い分野の共通語であること等からこの文書では「率」の方を採用することにした。一部の方々にとって道路橋示方書は金科玉条のようなものかもしれないが、ある査読意見の「Young 係数に『すべき』」というのはいかがなものかと感じたので、この脚注を追加した。

これ以外の関係は文献 [27] 等を参照のこと。鋼の場合、 $E = 205 \text{ GN/m}^2$ (kN/mm^2), $\nu = 0.3$ 程度の値を持つ。最も基本的な材料定数の K と G の物理的な意味は上の二つの式 (3.44) (3.45) から明らかだが、 E と ν の意味は式 (3.60) の方がわかり易いだろう。

式 (3.46) は、式 (3.9) の Kronecker のデルタを用いて一般に

$$\sigma_{ij} = \sum_m \sum_n C_{ijmn} \epsilon_{mn}, \quad C_{ijmn} \equiv \mu (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) + \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} \quad (3.49a, b)$$

と表されることが多い。これは初学者には難しい²⁴だろうが早めに慣れて欲しい。この係数 C_{ijmn} を、弾性係数テンソルあるいは弾性テンソル \mathbf{C} の成分と呼ぶ。あるいは、応力成分とひずみ成分を適当な 6 行 1 列の行列で

$$\left\{ \sigma \right\} \equiv \left[\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{23} \sigma_{31} \sigma_{12} \right]^T, \quad \left\{ \epsilon \right\} \equiv \left[\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33} \epsilon_{23} \epsilon_{31} \epsilon_{12} \right]^T \quad (3.50a, b)$$

と定義した上で

$$\left\{ \sigma \right\} = \left(\tilde{\mathbf{C}} \right) \left\{ \epsilon \right\} \quad (3.51)$$

と表すことがある。ここに弾性係数行列 $\left(\tilde{\mathbf{C}} \right)$ は

$$\left(\tilde{\mathbf{C}} \right) \equiv \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & & 2\mu & 0 \\ \text{Symm.} & & & & & 2\mu \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_{11} = C_{1111}, \quad \tilde{C}_{12} = C_{1122}, \quad \tilde{C}_{44} = 2C_{2323} \quad \text{etc.} \quad (3.52a, b, c, d)$$

と書くことができる。ここでは 2 階・4 階のテンソルを 1 列行列・正方行列で成分表示し、行列要素の順番だけはいわゆる Voigt 定数の表記法に従っているので、例えば $\tilde{C}_{66} = 2C_{1212}$ 等になる。

あ、いや待てよ。確かひずみの座標変換や応力の不変量を説明した節では、式 (3.45) のようにテンソルの成分を用いるのではなく、選んだ座標系によらない不変量等を用いて材料の抵抗則を表すのがよさそうだとほめかしていたじゃないか。せん断抵抗を記述する際に直角座標成分間の関係式 (3.45) で抵抗則を表しても問題は無いのだろうか。この疑問点は、実は等方弾性体の場合には問題にならないのである。しかし参考のために、この関係式と不変量の間を求めておこう。式 (3.45) の辺々の 2 乗和をとると

$$\sum_i \sum_j \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 4G^2 \sum_i \sum_j \epsilon'_{ij} \epsilon'_{ij} \rightarrow \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = G^2 \sum_i \sum_j 2\epsilon'_{ij} \epsilon'_{ij} \quad (*)$$

を得る。そこで、2 階のテンソル成分の 2 乗和もちょうどベクトル成分の 2 乗和と同様のノルムの 2 乗だと解釈して、上式の両辺の項の平方根を用いて

$$\bar{\tau} \equiv \sqrt{\sum_i \sum_j \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}, \quad \bar{\gamma} \equiv \sqrt{\sum_i \sum_j 2\epsilon'_{ij} \epsilon'_{ij}} \quad (3.53a, b)$$

と定義すると、結局上式 (*) の両辺の平方根をとると

$$\bar{\tau} = G \bar{\gamma} \quad (3.54)$$

²⁴ この係数を $C_{ijmn} \equiv 2\mu \delta_{im} \delta_{jn} + \lambda \delta_{ij} \delta_{mn}$ と定義しても形式的には式 (3.46) と同じにはなるが、この係数は式 (3.55) のような等方テンソルではないので、場合によってはとんでもない事態になることがあるので注意が必要だ。第 1 著者は学生時代に実際痛い目に合った。

という式に帰着する。式 (3.53) の $\bar{\tau}$ と $\bar{\gamma}$ の平方根の中は ($\bar{\gamma}$ の定義中の係数の 2 や符号を気にしなければ) それぞれ偏差応力と偏差ひずみの第 2 不変量に相当し、式 (3.54) はその不変量同士の関係であり、選んだ座標系には依存しない。塑性論を勉強するとわかるが、この $\bar{\tau}$ は相当応力と呼ばれる「せん断応力成分」であり、 $\bar{\gamma}$ は塑性論で定義される相当塑性ひずみに相当する「せん断変形成分」である。したがって Hooke の法則は、応力とひずみの第 1 不変量同士の関係式 (3.44) と、偏差応力と偏差ひずみの第 2 不変量同士 (第 1 不変量は零なので) の関係式 (3.54) で定義されていると解釈しても構わないことになる。とても美しい。

具体的にある面内のせん断ひずみだけが非零の場合、例えば ϵ_{12} 以外がすべて零の場合には上式 (3.53b) からは $\bar{\gamma} = 2 |\epsilon_{12}|$ となることから、この $\bar{\gamma}$ は後述の式 (3.66b) で定義される工学ひずみのせん断ひずみ成分であることがわかる。同様に σ_{12} 以外がすべて零の場合には上式 (3.53a) からは $\bar{\tau} = |\sigma_{12}|$ となるので、この $\bar{\tau}$ がせん断応力成分であることが明らかである。また、写真 3.3 の土質の 3 軸圧縮試験のように、主応力状態で

$$\sigma_{11} = \sigma_a, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_c, \quad \sigma_{ij} \equiv 0 \quad (i \neq j)$$

となっている場合には

$$\sigma'_{11} = \frac{2}{3}(\sigma_a - \sigma_c), \quad \sigma'_{22} = \sigma'_{33} = -\frac{1}{3}(\sigma_a - \sigma_c) \quad \rightarrow \quad \bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{3}} |\sigma_a - \sigma_c|$$

となる。このことから、この軸差応力²⁵ ($\sigma_a - \sigma_c$) がせん断応力成分であることがわかり、せん断抵抗特性を測定する土質試験の結果を軸差応力を用いて整理する理由が、この関係式から理解できる。

(2) 材料定数は二つだけ?

等方弾性はたった二つの材料定数でその特性を代表させることができた。その結果を次のように確かめてみる。ある座標系で表された等方弾性関係式 (3.49a) を、別のある回転させた座標系の成分同士の関係で表すと

$$\bar{\sigma}_{kl} = \sum_m \sum_n \bar{C}_{klmn} \bar{\epsilon}_{mn}$$

と書くことができる。この右辺に式 (3.12) の逆関係を代入すると

$$\bar{\sigma}_{kl} = \sum_p \sum_q \sum_m \sum_n \bar{C}_{klpq} T_{pm} T_{qn} \epsilon_{mn}$$

という関係になる。これを式 (3.40) に代入することによって

$$\sigma_{ij} = \sum_p \sum_q \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n T_{ki} T_{lj} \bar{C}_{klpq} T_{pm} T_{qn} \epsilon_{mn}$$

となる。これと元の式 (3.49a) を等置することにより

$$C_{ijmn} = \sum_p \sum_q \sum_k \sum_l T_{ki} T_{lj} T_{pm} T_{qn} \bar{C}_{klpq}$$

と、弾性係数テンソルの座標変換則を得る。座標変換行列が正規直交行列であることを考慮すれば、この逆関係は

$$\bar{C}_{ijmn} = \sum_p \sum_q \sum_k \sum_l T_{ik} T_{jl} T_{mp} T_{nq} C_{klpq}$$

²⁵ 軸差応力の英訳は 'deviator stress' らしく、まさに偏差応力であることが明白だ。



写真 3.3 3 軸圧縮試験

である。これは4階のテンソルの座標変換則である。そして、これに式(3.49b)を代入すると実はどんな座標変換 (T) に対しても

$$\bar{C}_{ijmn} = C_{ijmn}$$

であることを示すことができる。すなわち、Hookeの法則の弾性係数テンソルは座標をどんなに回転させても成分そのものが全く変化しないことを意味している。等方材料の抵抗則を表しているのだから当然だ。

このことから、式(3.49b)の $\left\{\frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})\right\}$ と $(\delta_{ij}\delta_{mn})$ あるいは

$$A_{ijmn} \equiv \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{mn}, \quad B_{ijmn} \equiv \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{mn} \quad (3.55a, b)$$

を成分に持つ4階のテンソル²⁶を等方テンソルと呼ぶ。後者のテンソル \mathbf{A} と \mathbf{B} はそれぞれせん断抵抗と体積抵抗に対応した成分と考えてもよく、それぞれの二つの係数が独立した二つの材料定数であることから、等方弾性係数は

$$C_{ijkl} = 2G A_{ijkl} + 3K B_{ijkl} \quad (3.56)$$

とも表現できる。実際、これを式(3.49)の C_{ijkl} と置き換えて、式(3.55)をそれに代入して整理すると式(3.46)を得ることから、式(3.56)が正しいことを示すことができる。また \mathbf{A} は次の式(3.57a)(3.57b)の意味で部分的には等方的ではなく(せん断的)、 \mathbf{A} と \mathbf{B} は次の式(3.57c)の意味で直交²⁷している。

$$\sum_i A_{iimn} = 0, \quad \sum_m A_{ijmm} = 0, \quad \sum_m \sum_n A_{ijmn} B_{mnkl} = 0 \quad (3.57a, b, c)$$

そこで、式(3.56)と4階の単位テンソル $\mathbf{I}^{(4)}$ および任意の4階のテンソル \mathbf{S} を

$$C_{ijkl} := [2G, 3K]_{ijkl}, \quad I_{ijkl}^{(4)} := [1, 1]_{ijkl}, \quad S_{ijkl} = \alpha A_{ijkl} + \beta B_{ijkl} := [\alpha, \beta]_{ijkl}$$

と書くことにすると、上述の直交性を利用してテンソル積等の加減乗除の演算では

$$\{C_{ijkl}\}^{-1} := \left[\frac{1}{2G}, \frac{1}{3K} \right]_{ijkl}, \quad \sum_m \sum_n C_{ijmn} (I_{mnkl} + S_{mnkl}) := [2G(1 + \alpha), 3K(1 + \beta)]_{ijkl}$$

という関係が成立[74]する。この関係を用いると、式(3.56)の逆テンソルである等方弾性コンプライアンステンソル成分は

$$D_{ijkl} \equiv \{C_{ijkl}\}^{-1} = \frac{1}{2G} A_{ijkl} + \frac{1}{3K} B_{ijkl} = \frac{1}{4G} (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2G} \right) \delta_{ij}\delta_{mn} \quad (3.58)$$

と表現できる。ちなみにコンプライアンスとは、式(3.49b)の逆の

$$\epsilon_{ij} = \sum_m \sum_n D_{ijmn} \sigma_{mn} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2G} \right) \delta_{ij} \sum_k \sigma_{kk} \quad (3.59)$$

というひずみ応力関係の係数のことである。あるいはYoung率とPoisson比も用いて行列で表すと

$$\{\epsilon\} = (\bar{D})\{\sigma\}, \quad (\bar{D}) \equiv \begin{pmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/2G & 0 & 0 \\ & & & & 1/2G & 0 \\ \text{Symm.} & & & & & 1/2G \end{pmatrix} \quad (3.60a, b)$$

となる。 E や ν の物理的な意味は、このコンプライアンスの方がわかり易い(第3.6.3(2)節)だろう。

²⁶ Kroneckerのデルタはテンソル成分ではないのに、これをテンソルと呼んでいいのだろうか。

²⁷ 東京大学地震研究所堀宗朗先生の示唆による。

3.4.3 弾性係数の特性

(1) 対称性と独立な材料定数

等方弾性材料だけではなく、一般的な線形弾性材料に対しても応力ひずみ関係を式 (3.49a) と同じように

$$\sigma_{ij} = \sum_m \sum_n C_{ijmn} \epsilon_{mn} \quad (3.61)$$

と表すことができ、一般化された **Hooke の法則** と呼ばれる。応力テンソルもひずみテンソルも 9 個の成分を持つから、この弾性テンソル \mathbf{C} は 81 個の成分でできていることになるが、応力テンソル成分とひずみテンソル成分が対称であることから、弾性テンソル成分は

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (3.62a, b)$$

という対称性を持つように定義することができる。したがって、独立な成分の数は 36 個になる。ちょうど、式 (3.52) の要素がすべて非零であるが非対称である場合に相当する。

さてここで、材料が何らかのポテンシャルを持ち保存的である場合を考えてみる。ここで言う保存的というのは、応力が

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (3.63)$$

のようにひずみと関係付けられる材料特性のことで、 $W(\boldsymbol{\epsilon})$ をひずみエネルギー関数あるいは弾性ポテンシャルと呼ぶ。この W の形を求めるために、後述の第 3.5.1 節で定義される仮想仕事を使ってみる。まず、つり合い式 (3.22) に仮想的な変位 $\delta \mathbf{u}$ (つり合っている状態からちょうどだけ²⁸仮想的に与える変位なので δ を付けた) を乗じて得られる全体積中の仮想仕事を算定すると

$$\int_V \sum_{i=1}^3 \delta u_i \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i \right) dV = 0$$

となる。この左辺がその仮想仕事であり、もともとつり合っているので仮想仕事は零になっている。詳細は省略するが、この式を Gauss の発散定理等と応力やひずみの成分の対称性とを利用すると、最終的に

$$\int_V \sum_i \sum_j \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ji} dV - \int_V \delta u_i X_i dV - (\text{境界項}) = 0$$

となる。これに上式 (3.61) の一般化された Hooke の法則を代入すると

$$\int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta \epsilon_{ij} C_{ijkl} \epsilon_{kl} dV - (\text{外力項と境界項}) = 0$$

と表すことができる。第 1 項を仮想内力仕事と呼び δU と記すことにするが、もし弾性係数が

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (3.64)$$

を満足したとすると、この仮想内力仕事 δU は

$$\delta U \equiv \frac{1}{2} \left(\int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta \epsilon_{ij} C_{ijkl} \epsilon_{kl} dV + \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ij} C_{ijkl} \delta \epsilon_{kl} dV \right)$$

と分解することができるため、 δU をひずみ $\boldsymbol{\epsilon}$ についての全微分だと解釈すれば、これをひずみで積分 (関数で積分) することができ、結局

$$U \equiv \frac{1}{2} \int_V W(\boldsymbol{\epsilon}) dV, \quad W(\boldsymbol{\epsilon}) \equiv \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \epsilon_{kl} C_{klmn} \epsilon_{mn} \quad (3.65a, b)$$

²⁸ 仮想仕事としては、特に大きさに制限は無いのではあるが。

のように、ひずみエネルギー U とひずみエネルギー密度関数 W を定義することができる。逆に、この W をひずみで微分して式 (3.64) の対称性を利用すれば、式 (3.63) の応力ひずみ関係式を得ることができる。

もし弾性体が式 (3.65b) のようなエネルギー密度関数を持つ材料としてモデル化できるなら、弾性係数はさらに式 (3.64) の対称性も持っていないから、弾性テンソルは 21 個の独立な材料定数で表される。ちょうど、式 (3.52) の要素がすべて非零で対称の場合に相当する。つまり、一般的な異方性弾性材料は 36 個ないし 21 個の材料定数を用いて構成則を記述できる。さらに、直交する三つの面に対して対称な材料特性（微視構造等）を持つ直交異方性材料の場合には、対称性によって独立な定数の数が減って 12 個になる。ちょうど、式 (3.52) の非零の要素がすべて独立であるが非対称な場合に相当する。2次元なら、藁を直交させて編んだむしろや布目のあるハンカチの、辺方向と対角方向との抵抗が違う状況を思い浮かべる（実験してみる）といいかもしれない。この場合も、もしエネルギー密度関数が存在するモデルなら 9 個が独立になる。これがちょうど、式 (3.52) の非零の要素が独立で対称な場合に相当する。さらに、もう 1 種類の対称面がある（ちょうど立方晶のような）場合には、独立な定数が 3 個になり、最終的に方向性が無くなった場合には 2 個の独立な定数しか必要が無くなる。これがまさに式 (3.52) の等方弾性体である [62, 175]。

具体的な表現を示すために、式 (3.50) のひずみ行列の定義を少しだけ変更して

$$\{\sigma\} \equiv [\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{23} \sigma_{31} \sigma_{12}]^T, \quad \{\gamma\} \equiv [\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33} 2\epsilon_{23} 2\epsilon_{31} 2\epsilon_{12}]^T \quad (3.66a, b)$$

と定義する。 $\{\gamma\}$ の要素は工学ひずみと呼ばれる。これを用いると応力ひずみ関係は

$$\{\sigma\} = (C) \{\gamma\} \quad (3.67)$$

と表すこともできる。ここに直交異方性材料の弾性係数行列 (C) は

$$(C) \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}, \quad C_{11} = C_{1111}, \quad C_{12} = C_{1122}, \quad C_{44} = C_{2323} \quad \text{etc.}$$

(3.68a, b, c)

と書くことができる。この行列の要素はいわゆる Voigt 定数と呼ばれる。一般には式 (3.64) の対称性は成立するとは限らないので、この表現では弾性定数行列が非対称 $C_{ij} \neq C_{ji}$ であることには注意する必要がある。

そして、等方弾性の場合には Voigt 定数で独立なのは 2 個だけになり

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = C_{23} = C_{31} = \lambda, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) = \mu, \quad C_{ij} = C_{ji}$$

という関係になる。これに対して独立な定数が 3 個の材料は、単結晶なら Al や Cu, Fe, Ni 等の立方晶²⁹であり

$$C_{11} = C_{22} = C_{33}, \quad C_{12} = C_{23} = C_{31}, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66}, \quad C_{ij} = C_{ji} \quad (3.69a, b, c, d)$$

が独立な非零の定数である。一方、Mg や Zn のような単結晶は六方晶である。これは、ある一つの方向の格子構造が他の 2 方向の格子構造とは異なる³⁰と考えればいい。この場合には、その特殊な格子構造方向の軸の

²⁹ 鋼は鉄と主に炭素の合金だが、鉄が等方材料ではないのになぜ鋼を等方材料として扱うことができるのだろうか。それは、一般に土木屋が対象とする結晶金属は単結晶体ではなく多結晶体だからだ。つまり、単結晶は特有の方向性・方位を持っているが、多結晶体中には個々には異なる方位を持った単結晶がほぼ無数にランダムに分布しているので、巨視的にはほぼ等方性を持つことになるのである。

³⁰ 映画 SUPERMAN (@Warner Bros. Entertainment Inc.) で使われる重要な「クリスタル」のような形。

回りに（その軸を法線とする面内のみに）だけ等方性を持つため、独立な材料定数は6個（ $C_{13} \neq C_{31}$ の場合）ないし5個（ $C_{13} = C_{31}$ の場合）になる。例えば x_3 方向がその特徴的な方向なら

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{33}, \quad C_{12} = C_{21}, \quad C_{31} = C_{32}, \quad C_{13} = C_{23}, \quad C_{44} = C_{55}, \quad C_{66} = \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) \quad (3.70a, b, c, d, e, f, g)$$

の中の5個ないし6個が独立な非零の定数である。このような性質を横等方性と呼ぶ。第3.6.3(4)節で紹介する1方向にのみ繊維で補強した材料は、巨視的にその性質を持つ材料である。

さて式(3.67)の逆関係を

$$\{\gamma\} = (D) \{\sigma\} \quad (3.71)$$

と表すと、一般的な直交異方性材料のコンプライアンス行列 (D) は式(3.60)³¹を一般化して

$$(D) \equiv \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/C_{66} \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

と書くことができる。この E_i や ν_{ij} は一般化された Young 率と Poisson 比と呼ばれる。そこで、横等方性材料の場合の諸量を求めてみると

$$\bar{D} \equiv C_{11} (C_{22} + C_{23}) - 2 C_{12} C_{21} \quad (3.73)$$

と定義しておく、まず

$$D_{23} = D_{32} = -\frac{C_{11} C_{23} - C_{12} C_{21}}{(C_{22} - C_{23}) \bar{D}}, \quad D_{31} = C_{21} = -\frac{C_{21}}{D}, \quad D_{12} = D_{13} = -\frac{C_{12}}{D} \quad (3.74a, b, c)$$

となることから

$$E_1 = \frac{\bar{D}}{C_{22} + C_{23}}, \quad E_2 = E_3 = \frac{(C_{22} - C_{23}) \bar{D}}{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}}, \quad \nu_{23} = \nu_{32} = \frac{C_{11} C_{23} - C_{12} C_{21}}{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}}, \quad (3.75a, b, c)$$

$$\nu_{31} = \nu_{21} = \frac{C_{21}}{C_{22} + C_{23}}, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \frac{C_{12} (C_{22} - C_{23})}{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}} \quad (3.75d, e)$$

のような関係がある。

例えば第H.3.1節で紹介する森・田中のアプローチを用いて、1方向だけに長い炭素繊維が配置されている複合材料(CFRP)の巨視的な弾性テンソルをモデル化してみよう。文献[31]で用いられた炭素繊維補強ポリマーの積層板としての材料定数は、後述の式(3.190)のように弾性テンソル成分と関係付けられているが、その実測値が $E_1 = 113 \text{ GN/m}^2$, $\nu_{12} = 0.32$, $E_2 = 7.4 \text{ GN/m}^2$, $G_{12} = 3.2 \text{ GN/m}^2$ (G_{12} の添え字は'12'となっているが、これは C_{66} ではなく $C_{44} = C_{55}$ の方)と与えられている。そこで森・田中アプローチを用いて、このような巨視的な炭素繊維補強ポリマー積層板の弾性定数に一致するような、母材と介在物の材料定数を同定してみた。炭素繊維は無限に長い円柱としてモデル化できるものとし、その体積比率を50%としてみた。その結果、母材のビニルエステル樹脂の Young 率と Poisson 比が $E_M = 2.81 \text{ GN/m}^2$, $\nu_M = 0.274$ で、介在物の炭素繊維の弾性定数が $E_1 = 223 \text{ GN/m}^2$, $\nu_1 = 0.352$ であればいい³²ことがわかった。なお、これを用いたとき、巨視的な積層板

³¹ 式(3.60)とはひずみ行列の定義が異なることには注意すること。

³² 著者はその真の値を知らない。多分公開されていない。

の材料定数のうちの ν_{21} は 0.0210 となった。この結果を式 (3.68) の形で示すと次のようになる。

$$\text{横等方性の弾性係数の例: } \left(C \right) = \begin{pmatrix} 8.62 & 3.17 & 3.77 & 0 & 0 & 0 \\ 3.17 & 8.62 & 3.77 & 0 & 0 & 0 \\ 3.77 & 3.77 & 115. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.72 \end{pmatrix} \text{GN/m}^2$$

なお、ここでは炭素繊維が x_3 方向に整列しているものとした。まさに式 (3.70) の関係がすべて成立し、さらに弾性テンソルが対称 ($C_{13} = C_{31}$, $C_{23} = C_{32}$) になっている。

ついでに、第 3.6.3 (4) 節で紹介する 2 方向 (ここでは x_1, x_2 方向) に同じ仕様の繊維を配置した補強材は、巨視的には

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{13} = C_{23}, \quad C_{31} = C_{32}, \quad C_{12} = C_{21}, \quad C_{44} = C_{55} \quad (3.76a, b, c, d, e)$$

のような材料になる。この場合のコンプライアンスを求めるために

$$\bar{D} \equiv C_{33}(C_{11} + C_{12}) - 2C_{13}C_{31} \quad (3.77)$$

と定義しておく、まず

$$D_{23} = D_{13} = -\frac{C_{13}}{\bar{D}}, \quad D_{31} = D_{32} = -\frac{C_{31}}{\bar{D}}, \quad D_{12} = D_{21} = -\frac{C_{33}C_{12} - C_{13}C_{31}}{(C_{11} - C_{12})\bar{D}} \quad (3.78a, b, c)$$

となることから

$$E_2 = E_1 = \frac{(C_{11} - C_{12})\bar{D}}{C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31}}, \quad E_3 = \frac{\bar{D}}{C_{11} + C_{12}}, \quad \nu_{23} = \nu_{13} = \frac{C_{13}}{C_{11} + C_{12}}, \quad (3.79a, b, c)$$

$$\nu_{31} = \nu_{32} = \frac{C_{31}(C_{11} - C_{12})}{C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31}}, \quad \nu_{12} = \nu_{21} = \frac{C_{33}C_{12} - C_{13}C_{31}}{C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31}} \quad (3.79d, e)$$

のような関係がある。

(2) 安定材料の Poisson 比の範囲

Voigt 定数を用いた行列表示を用いると、式 (3.65b) のひずみエネルギー密度関数は

$$W \equiv \frac{1}{2} \left\{ \gamma \right\}^T \left(C \right) \left\{ \gamma \right\} \quad (3.80)$$

のように行列表示できる。ところでエネルギー的考察では、この密度関数が正定値³³であることが材料が安定であるための条件であるとされる。当然 Hooke の等方弾性体は安定な材料のモデルなので

$$\det \left(\left(C \right) \text{のすべての小行列} \right) > 0 \quad (3.81)$$

を満足しなければならない。式 (3.48) を用いて、この弾性係数行列 (C) を μ と ν で表しておく、この安定条件は、まず $\det(\text{右下 } n \times n) > 0$ ($n = 1, 2, 3$) から $\mu > 0$ になるので、それを用いるとそれ以外の各小行列の正定値性のための Poisson 比に対する条件が

$$\begin{aligned} \det(\text{左上 } 1 \times 1) > 0 &\rightarrow [\nu > 1, \quad 1/2 > \nu], \\ \det(\text{左上 } 2 \times 2) > 0 &\rightarrow [1/2 > \nu], \quad \det(\text{左上 } 3 \times 3) > 0 \rightarrow [1/2 > \nu > -1] \end{aligned}$$

³³ 理由はともかく、関数 $\{\gamma\}$ の集合の上で汎関数 W が下に凸である条件。

となるので、Poisson 比がとり得る範囲は

$$1/2 > \nu > -1 \quad (3.82)$$

でなければならないことがわかる。通常の材料では Poisson 比は正の値と考えられ、完全流体やゴムのような非圧縮性材料（次節で説明する）ではその値が $1/2$ になる。複合材料の場合には、内部の微視構造によっては負の Poisson 比を持つことがある。

(3) 非圧縮性材料

我々の身の回りにある弾性体らしきものですぐ思い付くのはゴムだろう。しかしゴムは実は厄介な材料なのである。というのも、ほとんど体積が変化しないからだ。ちょうど水と同じ³⁴だ。つまり、式 (3.14) の体積ひずみが常に零の状態にある。したがって、ひずみ成分および変位成分の間には

$$\Delta = \sum_k \epsilon_{kk} = 0, \quad \text{あるいは} \quad \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3.83a, b)$$

という制約条件が適用されなければならない。この性質を非圧縮性と呼ぶ。しかし、ゴムを水中に沈めたときにも零ではない応力が生じるだろう。つまり式 (3.42) の内部抵抗としての平均応力 σ_{AVE} は零にはならないはずだ。ということは、ゴムに対する体積ひずみに関する Hooke の法則式 (3.44) からは

$$|\sigma_{AVE}| < \infty \quad \text{かつ} \quad \Delta = \frac{\sigma_{AVE}}{K} = 0 \quad \rightarrow \quad K \rightarrow \infty$$

という材料がゴムだということになる。式 (3.48a) を式 (3.48d) に代入して、 μ が有界である条件下で K に対する上の条件式が成立するためには、Poisson 比が

$$K = \frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \rightarrow \infty \quad \text{つまり} \quad \nu = \frac{1}{2} \quad (3.84)$$

となる。このように非圧縮性材料の Poisson 比は、前節で求めた範囲の片方の極限の $1/2$ であることがわかる。

したがって式 (3.46) の Hooke の法則は、このままでは

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} \quad \text{あるいは} \quad \sigma_{ij} = 2\mu \epsilon'_{ij} \quad (*)$$

となり、上式 (3.83b) の制約条件の下でこの比例関係が成立するのが非圧縮性材料となる。しかしこれでは、未知関数と支配方程式³⁵の数が一致しない。つまり、三つのつり合い式にこの制約条件式 (3.83) を加えた四つの支配方程式を三つの変位成分が満足しなければならず、未知関数の数より支配方程式の数が一つ多くなっている。さて、例えばゴム球を水中に沈めたときにはせん断変形は生じないだろうから、偏差ひずみ ϵ' は零である。だとすると、上式 (*) の Hooke の法則からは応力も零になってしまう。しかし前述のように、体積は不変ではあるものの内部の等方的な抵抗力は零にはならないはずだ。このことから、平均応力 $\sigma_{AVE}(\mathbf{x})$ が式 (3.42) のように応力成分で定義されるのではなく、変位やひずみはもとより応力とも独立した新たな未知関数 $-p(\mathbf{x})$ として存在して、Hooke の法則は

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = 2\mu \epsilon_{ij}(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}) \delta_{ij} \quad (3.85)$$

と定義され直さなければならないことがわかる。この $p(\mathbf{x})$ はいわゆる静水圧³⁶であり、構成則つまり材料の抵抗則とも関係無く新たに導入された未知関数である。これで支配方程式の数と未知関数の数が一致し、問題を

³⁴ 水を注射器に入れて押してもほとんど縮まないの、流体力学では非圧縮性材料に分類される。そして一般に、ゴムの体積変形もほとんど無いとされている。実験したことは無いが、思い切り引張った輪ゴムが細くなることから想像して欲しい。

³⁵ 支配方程式は場の微分方程式と境界条件式の両方を指すと思うが、この文書では前者だけだったりするので注意して欲しい。

³⁶ 固体も含む連続体を対象としているが、わかり易いので流体力学の呼び方を使った。したがって圧縮を正にしてあることに注意すること。

適切に記述できている。この式(3.85)をつり合い式(3.22)に代入すると、非圧縮性材料のつり合い式と制約条件式は

$$\mu \sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + X_i = 0, \quad \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3.86a, b)$$

と表される。したがって支配方程式が四つあり、未知関数は独立した変位成分三つと静水圧の一つの計四つになる。以上のような、結果を知っている者による静水圧の導入過程に疑問を抱いた読者は第3.5.2(4)節の数学的な誘導を参照のこと。

(4) 等方弾性行列の固有値って?

あるとき齊木功先生と、このことについて意見交換をした。眺めた教科書類のどこにも書いてなかったからだ。例えば式(3.52)の $\left(\bar{C} \right)$ の固有値と固有ベクトルは何だろう。力学的センスがいい読者はすぐに予想できるかもしれないが、 G と K だろうということは推測できる。しかし、そもそも4階のテンソルを便宜上行列表記しておいて「固有値」と言われても、それが力学的な結果になるかどうか不安ではある。そこで実際に

$$\left(\left(\bar{C} \right) - \zeta \left(I_6 \right) \right) \{ e \} = 0 \quad (3.87)$$

の固有値 ζ と対応する固有ベクトル $\{ e \}$ を求めてみた。 $\left(I_6 \right)$ は 6×6 の単位行列である。すると、固有値を求める特性方程式はちゃんと因数分解できて

$$-(\zeta - 2\mu)^5 \{ \zeta - (3\lambda + 2\mu) \} = 0 \quad (3.88)$$

となる。つまり固有値は果たして

$$\zeta = 2\mu = 2G, \quad \zeta = 3\lambda + 2\mu = 3K \quad (3.89a, b)$$

のように、せん断弾性係数の5重根と体積弾性係数そのものになった。対応する固有ベクトルは、例えば

$$\{ e \} = \left[1^{-1/2} -1/2 0 0 0 \right]^T, \quad \left[0 1 -1 0 0 \right]^T, \quad \left[0 0 0 1 0 \right]^T, \quad (3.90a, b, c)$$

$$\left[0 0 0 0 1 \right]^T, \quad \left[0 0 0 0 1 \right]^T, \quad \left[1 1 1 0 0 \right]^T \quad (3.90d, e, f)$$

と求めることができる。式(3.90a)~(3.90e)の五つが5重根のせん断弾性係数に対応した非圧縮変形モード・せん断変形モードである。式(3.90f)が体積弾性係数に対応した等方膨張モードである。そしてこの固有ベクトルはすべて直交している(ように選んである)。美しい。多分対称テンソルならではの特性で、4階のテンソルの行列表記に物理的意味が残っているのではないだろうか。と思っていたところ、Mehrabadi先生による文献[66]³⁷を第2著者が見つけてくれた。これはすごい。読者も式(3.89)(3.90)くらいは求めてみて欲しい。

ところで、式(3.68)のVoigt定数を用いた弾性係数行列 $\left(C \right)$ の場合の固有値は

$$\left(\left(C \right) - \zeta \left(I_6 \right) \right) \{ e \} = 0 \quad (3.91)$$

から

$$-(\zeta - 2\mu)^2 \{ \zeta - (3\lambda + 2\mu) \} (\zeta - \mu)^3 = 0 \quad (3.92)$$

となり、固有値が

$$\zeta = \mu = G, \quad \zeta = 2\mu = 2G, \quad \zeta = 3\lambda + 2\mu = 3K \quad (3.93a, b, c)$$

のようになり、等方材料なのに非圧縮変形モード二つと純せん断変形モード三つが別々のような扱いになってしまう(いや、その方がいいのかな?)ことに注意する必要があるようだ。 6×6 の行列表示した弾性係数行列を料理するときは、Voigt定数行列を用いない方が無難なのかもしれない。

³⁷ 第2著者が文献中に符号の typo を見つけた。表3の横等方の二つ目の固有値は $c_{33} + \sqrt{2}c_{13}(\tan \alpha - \sec \alpha)$ である。Mehrabadi先生にメールでお知らせしたところ、諸事情により研究ノートは未確認だが第2著者の計算は正しいだろうというご返事をいただいた。

演習問題 3-5

5. 式 (3.82) を証明せよ。

3.4.4 非弾性ひずみと非適合ひずみ

ここまでは、物体内のひずみと応力が一対一に対応するような変形による抵抗則について定義して説明してきた。つまり、変形に比例した材料の「弾性」抵抗によって応力が生じていたことから、その変形を弾性ひずみと呼ぶ。しかし、例えば温度変化によって物体が伸び縮みする場合のように、それだけによって生じるひずみが、必ずしもそこに生じるであろう応力とは一対一には対応しない場合がありそうだ。今は何のことを言っているかわからなくてもいいが、例えば自由空間に吊るした半径 a の鋼球を暖めた場合、その半径は大きくなって等方な膨張ひずみが生じるが、内部に応力は生じないということはわかると思う。このようにひずみと応力が一対一には対応しない場合があるというわけだ。そのようなひずみを非弾性ひずみと呼ぶことがある。そこで今度は、図 3.13 の左上の図のように、無限領域中の半径 a の球の領域だけの温度を ΔT だけ上げて、その領域だけを膨張させよう。この場合は周りの物体がその膨張をある程度拘束するので、周りに何も無い自由空間に置いた前述の球（右上の図がそれ）の場合とは同じ膨張量にはならない上に、今度はこの球の領域にも周りの領域にも零ではない応力が生じる。この問題をどうやって解こう。

まず、仮想的に（頭の中で）左上の図にある物体中の球を切り取って右上の図のように自由空間に置き、その温度を ΔT だけ変化させる。そのときの半径が a_T^s になったとしよう。つまり、温度変化だけによるひずみに相当する伸びひずみは

$$e_T^s \equiv \frac{a_T^s - a}{a} = \alpha \Delta T \quad (3.94)$$

となる。ここに α は線膨張係数と呼ばれる材料定数である。これをそのまま元の物体に戻そうとしても、 $a_T^s > a$ なので当然球と周りの物体は「重なって」しまう（はめこむことができない）はずだ。つまりこの伸びひずみだけでは式 (3.16) を満足しない（重なる）ため、このひずみが非適合なひずみ³⁸であることは明らかだ。

この球を元の物体にはめこむためには、球の方に圧力を加えて縮めると同時に同じ圧力で元の物体の孔を拡げればいいので、図の下段に示した左右の二つの図のように一様な圧力 p を球と孔に逆向きに与えてみよう。 p は ΔT に比例していると考えられるが、この段階では p の値は決められないので、とりあえずこれによって孔の半径が a_p になったとしよう。つまり、形式的にこの孔の部分の伸びひずみ³⁹は

$$e_p \equiv \frac{a_p - a}{a} = \frac{p}{\bar{K}} \quad (3.95)$$

と評価できる。この \bar{K} は見かけ上の体積弾性係数であり、孔に等方圧力を作用させたときの抵抗係数であるが、ここではその具体的な表現は省略し、具体例は第 3.6.4 (5) 節に示す。そして同じ圧力 p を逆向きに球にも

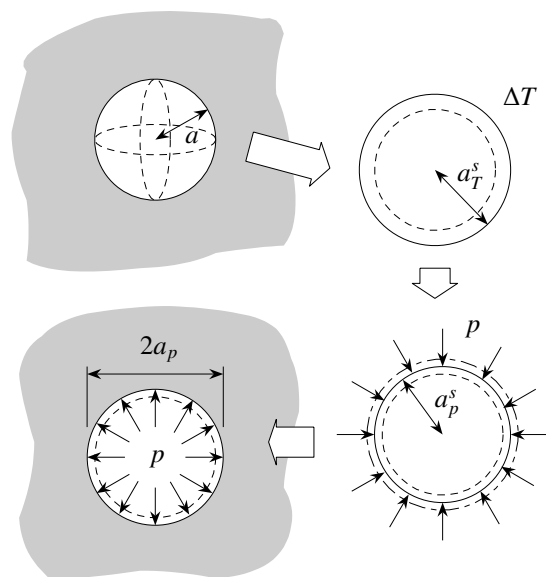


図 3.13 球の領域だけを熱膨張させる

³⁸ 等方弾性体内の球形状だけではなく楕円体形状の領域であれば、内部に生じるひずみが一様であることを Eshelby [25] が発見しており、20 世紀の重要な研究成果の一つとされる。なお村 [70] は、この例のように同じ材料中に非適合ひずみが分布した領域を inclusion (介在物) と呼び、周りとは異なる材料がある領域を inhomogeneity (非均質体) と呼んでいる。

³⁹ 孔はひずみなんか持たないだろう。その通りであるが、ここでは a_p がいくつかということが重要だ。しかしあとでひずみを用いて説明したいので、敢えて「形式的に」ひずみという語句を用いた。

与えて右下の図のように球の半径が a_p^s になったとする。つまり、自由空間で温度変化 ΔT によって半径が a_T^s になった球のその半径が、 p によって a_p^s になると考えればいいので、圧力 p によって生じた変形の変化に相当する伸びひずみは、形式的には

$$e_p^s \equiv \frac{a_p^s - a_T^s}{a_T^s} = \frac{p}{\bar{K}^s} < 0 \quad (3.96)$$

と書くことができる。この \bar{K}^s も具体的な表現は省略するが、見かけ上の体積弾性係数（負）である。この e_p^s は圧力 p に比例したひずみなので弾性ひずみである。最終的に、拡げた孔に重なりも隙間も無くこの球がはめこまれるためには

$$a_p = a_p^s \quad (3.97)$$

でなければならない。したがって、内部の抵抗圧力 p はある変形だけによって生じたのではなく、この条件式 (3.97) を満足するように発生したと考えれば、元の問題が解けたことになる。式 (3.94) (3.95) (3.96) を式 (3.97) に代入して、各ひずみが非常に小さいことを考慮して p と ΔT の線形項だけを用いて近似すると

$$a_p = a(1 + e_p) = a \left(1 + \frac{p}{\bar{K}}\right) = a_p^s = a_T^s \left(1 + \frac{p}{\bar{K}^s}\right) = a(1 + \alpha \Delta T) \left(1 + \frac{p}{\bar{K}^s}\right) \simeq a \left(1 + \frac{p}{\bar{K}^s} + \alpha \Delta T\right) \quad (3.98)$$

となるので、結局下線部の等式から、元の連続体に戻るために必要な圧力 p が

$$p = \left(\frac{1}{\bar{K}} - \frac{1}{\bar{K}^s}\right)^{-1} \alpha \Delta T \quad (3.99)$$

と求められる。これが元の物体内の球の部分に生じる平均（等方）応力である。

実際にはひずみは微小で、温度変化 ΔT と周りからの拘束圧力 p は同時に作用・発生するので、前述のように変形を順番に追跡する必要は無く、この二つの原因による線形解の重ね合わせでこの問題は解くことができる。つまり図 3.14 にあるように、半径 a の球の温度を上げた場合の解とそれに圧力をかけた場合の解との重ね合わせで、球が元の孔にはめこまれるようにすればいい。まず温度変化による球の膨張ひずみつまり非弾性ひずみは式 (3.94) と同じで

$$e_T^s \equiv \frac{\Delta a_T^s}{a} = \alpha \Delta T \quad (3.100)$$

である。一方、圧力による弾性ひずみは

$$e_p^s \equiv \frac{\Delta a_p^s}{a} = \frac{p}{\bar{K}^s} \quad (3.101)$$

となる。したがって、圧力 p と温度変化 ΔT によって球に生じたひずみの合計（総）ひずみは、この2式より

$$e_{T+p}^s \equiv \frac{\Delta a_{T+p}^s}{a} = e_p^s + e_T^s = \frac{p}{\bar{K}^s} + \alpha \Delta T \quad (3.102)$$

と求められ、この球が元に戻る条件式 (3.97) は幾何学的な適合条件であり、ここでは

$$a + \Delta a_{T+p}^s = a_p \quad (3.103)$$

で置き換えられる。これに式 (3.95) (3.102) を代入した式は式 (3.98) に一致し、必要な圧力 p は式 (3.99) になる。ちなみに、式 (3.101) の左辺の e_p^s の代わりに式 (3.102) の e_{T+p}^s と e_T^s を用いると

$$p = \bar{K}^s e_p^s = \bar{K}^s (e_{T+p}^s - e_T^s) \quad (3.104)$$

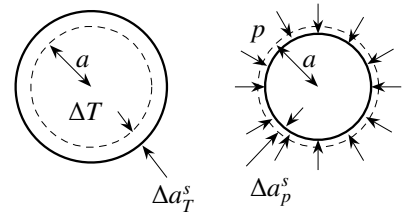


図 3.14 物体中で熱膨張する球領域

と書くこともできる。

最終的に球は孔に戻ったことから、元の物体中には隙間や重なりはもはや存在しない。つまり、この総ひずみ e_{T+p}^s が式 (3.16) を満足する適合ひずみであることは明らかである。しかし前述のように、温度変化 ΔT による非弾性ひずみ e_T^s は非適合ひずみだったことから、実は、埋め込むのに必要な圧力 p (生じた応力) による弾性ひずみ e_p^s も非適合ひずみなのだ。このように考えると二つの式 (3.102) (3.104) はそれぞれ、球の径の伸びひずみを ϵ と記すことによって形式的に

$$\epsilon(\text{総}) = \epsilon(\text{弾性}) + \epsilon(\text{非弾性}), \quad (\text{応力 } p) = (\text{弾性係数 } \bar{K}^s) \times \epsilon(\text{弾性}) = \bar{K}^s \times \{\epsilon(\text{総}) - \epsilon(\text{非弾性})\}$$

と読み替えることができる。したがって、ひずみと変位の関係式 (3.6) と Hooke の法則式 (3.49a) はさらに一般化しておく必要があり、それは上式に対応させることによって

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \sigma_{ij} = \sum_k \sum_l C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e = \sum_k \sum_l C_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) \quad (3.105a, b)$$

と表されなければならない。ここに ϵ_{ij}^e は弾性ひずみの成分であり、弾性定数を介して応力と直接関係のある変形成分である。前節までの応力ひずみ関係についての説明はすべてこの弾性ひずみについて述べられていたことに注意しなければならない。一方 ϵ_{ij}^* は非弾性ひずみの成分で、材料の抵抗と直接は関係の無い変形成分である。しかも弾性ひずみも非弾性ひずみも両方共に非適合ひずみであるが、左辺の総ひずみは式 (3.103) のような幾何学的適合性を満足する (つまり式 (3.16) を満足する) 適合ひずみなので、式 (3.105a) の最右辺のように変位勾配と関係付けることができる。この例の温度ひずみが非弾性ひずみの代表だが、次の節で紹介する塑性ひずみ (増分) ももう一つの代表である。温度変化に関係した問題の具体的な計算例は、平面問題の場合の解を第 3.6.4 (5) 節で、棒の伸び縮み問題の解を第 G.2 節で示す。

3.4.5 塑性論の基礎

(1) 非可逆変形と塑性

この節の内容は第 11 章で詳述し、それ以外の章の特に構造力学の章ではほとんど使わないため読まなくても構わないが、頭の体操にはなると思う。あるいは、構造力学を初めて学ぶ読者は平面問題の第 3.6.3 節以降を眺めて次の章に移ってもいい。さて、針金を思いっきり曲げたあと手を離しても元の形には戻らなくなる。それを応力とひずみで模式的に示したのが図 3.15 で、元に戻らない変形分を **残留変形** と呼んでいる。こういった非可逆的特性も非弾性と呼ぶが、特にその残留変形が時間と共に変化しない場合、その変形量を **塑性変形** と呼ぶ。塑性は弾性とは大きく異なり、1) 状態を定義する条件式と、2) 変形の変化則を定義する条件式との二つを規定する必要がある。

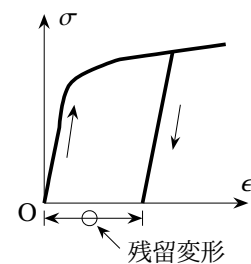


図 3.15 元に戻らない針金

(2) まず摩擦とすべりを考えてみる

上の二つの条件式が必要なことを感じるために、非可逆変形の例として摩擦とそれが切れたときのすべり移動を少し考察してみよう。図 3.16 に示したのは、ある斜めの力 F で消しゴムを押している状況である。この床と消しゴムの間の静止摩擦係数を μ_s とする。1) 消しゴムがすべり始める可能性は

$$f \equiv S - \mu_s N = F (\cos \theta - \mu_s \sin \theta) = 0 \quad (*)$$

で与えられるが、ここでは「便宜上」実際にはすべらないものとする。2) この状態で力の大きさや向きをちょっとだけ変化させた ($+\alpha$) とき、例えば $S \rightarrow S + \Delta S$ とか $\theta \rightarrow \theta - \Delta\theta$ のような変化が与えられたとき、もし f が正になろうとしたとき ($\Delta f > 0$) に初めてすべり始めるものとする。これが二つの条件である。ただし、外力等を変化させても $f < 0$ を保持している状態では、図の破線の形をしていた消しゴムは移動せずに実線の平行四辺形に「弾性変形するだけ」だとする。

例えば $S \rightarrow S + \Delta S, \Delta S > 0$ とした場合には

$$\Delta f = \{S + \Delta S - \mu_s N\} - \{S - \mu_s N\} = \Delta S > 0 \rightarrow \{\Delta(\text{すべり}) > 0\} \parallel S$$

となるから、 ΔS の方向である床方向、あるいは S の方向にすべり始める。では次に、押さえつける力を緩めるように $N \rightarrow N - \Delta N, \Delta N > 0$ とした場合は、もっと弾性との差が明確で、外力を小さくしたのに

$$\Delta f = \{S - \mu_s (N - \Delta N)\} - \{S - \mu_s N\} = \mu_s \Delta N > 0 \rightarrow \{\Delta(\text{すべり}) > 0\} \parallel S$$

となるのですべり始めるのだが、大事なのはすべる方向が変動 ΔN とは関係が無く、それと直交する床方向つまり S の方向である。では $F \rightarrow F + \Delta F, \Delta F > 0$ の場合はどうだろう。このときは

$$\Delta f = (F + \Delta F) (\cos \theta - \mu_s \sin \theta) - F (\cos \theta - \mu_s \sin \theta) = \Delta F (\cos \theta - \mu_s \sin \theta) = 0 \rightarrow \Delta(\text{すべり}) = 0$$

のように、摩擦が切れる条件を満足したままで f には変化が無いのですべらない。最後に力の向きを変えて $\theta \rightarrow \theta - \Delta\theta$ とした場合には、 $0 < \Delta\theta \ll 1, 0 < \theta < \pi/2$ ならば

$$\Delta f = F \Delta\theta (\sin \theta + \mu_s \cos \theta) > 0 \rightarrow \{\Delta(\text{すべり}) > 0\} \parallel S$$

となりすべり始めるが、その向きはやはり S の方向である。

このように、状態を規定する関数 f が負であれば消しゴムは弾性変形するだけであり、関数 f が零になったときに非可逆的な運動が生じる可能性が発生する。そして、その関数 f が増えて正になろうとした ($f = 0$ および $\Delta f > 0$) ときに非可逆的なすべり運動が生じる。しかし、その運動の向きは常に、外力変動や作用の向きの変動とは無関係の床に沿った方向、言い換えればせん断力 S の方向、つまり

$$\Delta(\text{すべり}) \parallel S, \Leftrightarrow (\text{非可逆的なすべり変形の「変化の可能性」の向き}) \parallel (\text{せん断力の向き}) \quad (3.106)$$

のように生じることになる。これに対して弾性的場合はどうだろう。例えば N を増やす ($\Delta f < 0$) と消しゴムは N の方向にさらに縮もうとするだろう。また摩擦抵抗している状態 ($f < 0$) で S を増やすと消しゴムはその S の向きに歪もうとするだろう。つまり、弾性状態 ($f < 0$) あるいは非可逆運動が生じない場合 ($\Delta f < 0$) には弾性変化しか生じず、しかもその変形の変動は外力変動や作用の向きの変動と一対一に關係するのである。

(3) 降伏条件 — 状態の定義

まず必要なのは、どういう状態に至った時点で塑性変形が生じ始める可能性があるのかを規定する条件である。前節の式(*)に相当する条件で、それを降伏条件と呼ぶ。鋼等の構造用の等方均質な(多結晶)金属材料を対象を限った場合、一般に静水圧(等方圧)では塑性変形は発生しないと考えていい。すなわち鋼球を海底深く沈めると直径は小さくなるが、その変形は弾性的であり、海面に戻すと直径は元に戻り残留変形は生じないというのだ。したがって、塑性変形特性を支配しているのはせん断変形およびせん断抵抗が主であると考えるのが適切である。ただし、詳細は省略するが、残留変形は変形履歴に従って累積する。そのため、状態を定義する降伏条件を変形あるいはひずみで規定することは一般には適切ではない。

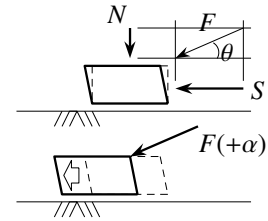


図 3.16 摩擦とすべり

このような事実を踏まえると、せん断抵抗成分を代表している応力、すなわち式(3.43)で定義した偏差応力で降伏条件を与えるのが適切であると考えられる。ただし、ある座標系における偏差応力テンソルの「成分」そのものでその条件を与えることが相応しくないことは明らかである。というのも、今までも何度も書いたように、材料の性質はそれを観察あるいは記述している人間の都合で導入した座標系に依存するとは限らない⁴⁰からだ。したがって、座標とは関係の無い量として主応力⁴¹あるいは偏差応力の不変量を用いるのが適切だということのを思い付く。そこで、式(3.43)の偏差応力の不変量を式(3.36)の応力の不変量に準じて定義すると、その定義から明らかなように第1不変量(通常 J_1 と記すことが多い)は零 $\left(J_1 \equiv \sum_{k=1}^3 \sigma'_{kk} = 0 \right)$ になる。そして第2不変量は、応力そのものの第2不変量とは符号が異なるが

$$\bar{\sigma}^2 = J_2 \equiv \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma'_{ij} \sigma'_{ji} \tag{3.107}$$

で定義できる。特別な例として前述のように、 x_1 - x_2 面内の単純なせん断応力状態である場合を考えると応力テンソル成分は $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ のみが非零なので、これを上式に代入すると $\bar{\sigma} = |\sigma_{12}|$ となる。このことから、 $\bar{\sigma}$ がせん断抵抗を代表した指標であることがわかる。そこでベクトルのノルムからの類推をすると、 $\bar{\sigma}$ は偏差応力の一種のノルム(絶対値)と考えてもよさそうなので、塑性モデルの一つとして、この $\bar{\sigma}$ がある限界値に達したときに塑性変形が発生すると考えてみよう。つまり

$$\bar{\sigma} = \tau_Y \quad \text{あるいは} \quad f \equiv \bar{\sigma} - \tau_Y = 0 \tag{3.108}$$

が降伏条件になると考えるのだ。ここに τ_Y を初期せん断降伏応力と呼ぶ。例えば x_1 - x_2 面内の単純なせん断応力状態では、上の降伏条件式は単純な関係 ($|\sigma_{12}| = \tau_Y$) になることから、限界値を τ_Y と置いたことに違和感はないと思う。この降伏条件は **Mises** の降伏条件と呼ばれている。

あるいは鋼の引張試験のように、例えば x_1 方向の応力 σ_{11} だけが零でない場合には式(3.107)から $\bar{\sigma}^2 = 1/3(\sigma_{11})^2$ となるので、降伏条件は $|\sigma_{11}| = \sqrt{3}\tau_Y$ となる。このことから、引張降伏応力 σ_Y とせん断降伏応力が

$$\sigma_Y = \sqrt{3}\tau_Y \tag{3.109}$$

という関係にあることがわかる。そのため、式(3.107)(3.108)の代わりに

$$\bar{\sigma}^2 \equiv \frac{3}{2} \sum_i \sum_j \sigma'_{ij} \sigma'_{ji} = 3\bar{\sigma}^2, \quad \bar{\sigma} = \sigma_Y \tag{3.110a, b}$$

のように降伏条件を定義する場合もある。この $\bar{\sigma}$ は相当応力と呼ばれている。構造力学分野の降伏の代表値には引張降伏応力の方がよく用いられる。ちなみに、三つの主応力方向のすべてと等しい角をなす面上のせん断応力成分つまり八面体応力 τ_o [27] は $\bar{\sigma}$ と

$$\tau_o = \sqrt{2/3}\bar{\sigma} \tag{3.111}$$

という関係にある。

このように、塑性変形が主にせん断で支配されることから類推できるように、塑性変形は物体内部の非可逆的なすべり変形でモデル化できそうだ。つまり図3.17に模式的に示したように、外力の作用によって物体内

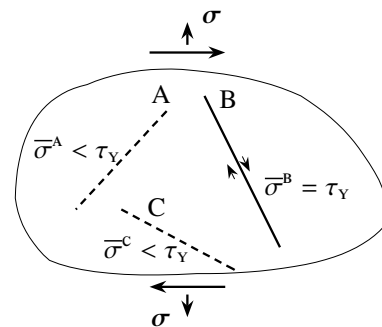


図3.17 降伏条件: すべり系 A, B, C の中の B だけがすべる条件を満足し塑性変形の向きが決定される。

⁴⁰ 客観性の一つ。

⁴¹ 二つずつの主応力差の半分, $1/2|\sigma_i - \sigma_j|$, ($i, j = \text{I, II, III}$) のうちの最大値(最大せん断応力)で降伏を規定する条件は **Tresca** の降伏条件と呼ばれる。

部に生じた応力の組み合わせが、ある特定の向きを持った面上⁴²の摩擦抵抗を無力にし、すべりの発生⁴³が可能になると考える。このように、ある面上の応力状態がすべりを可能にした場合に「降伏条件が満足された」と判断でき、そこに塑性変形が生じると考える。したがって、前節の摩擦とすべりの場合と同様、そのあとのすべり変形の向きはこの面の向きで決定されることになる。

(4) 流れ則 — 変形の変化則

次に必要な条件は、一旦降伏条件を満足したあとに変形がどのように生じようとするのかを規定する条件である。そのような抵抗特性の記述には、非線形的な全応力と全ひずみ関係で表す全ひずみ理論と、ひずみ速度（増分）が塑性ポテンシャルで与えられる等とする流れ理論とがある。ここではその詳細は述べないが、前者は単調比例載荷状態で取り扱いが比較的楽な反面、応力とひずみの一対一関係が無い弾塑性現象をうまく表しきれない。一方後者は、応力速度（増分）とひずみ速度（増分）を関係付けた増分理論になり、連続体力学で広く用いられる基本的な非線形モデルである。このように、現在の状態からどのように発展するのか、つまり、どんな増分や変化が生じるのかという記述の仕方を流れ則あるいは発展則と総称している。

その流れ則については、前節の摩擦とすべりの場合にも力や向きの増分を用いてすべる規定を記述していたことに対応させて、ひずみそのものではなくひずみ増分⁴⁴あるいはひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ と応力 σ を用いて記述する。そして塑性変形は実は非適合ひずみに相当する⁴⁵ことから、式(3.105)を増分量に対して拡張し、総ひずみ増分 $\dot{\epsilon}$ も弾性成分 $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ と塑性成分 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ に分解した上で増分間を

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.112)$$

のように関係付ける。ここに \dot{u} は変位増分あるいは速度である。このように分解した上で、Prandtl (1924) と Reuss (1930) は流れ則を

$$\frac{\dot{\epsilon}_{xx}^p}{\sigma'_{xx}} = \frac{\dot{\epsilon}_{yy}^p}{\sigma'_{yy}} = \dots = \frac{\dot{\epsilon}_{xy}^p}{\sigma'_{xy}} \rightarrow \dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \sigma'_{ij}, \quad \lambda \geq 0 \quad (3.113)$$

のようにモデル化 [39] した。つまり塑性変形の変化は偏差応力と同じ方向に発生しようとする。偏差応力が物理的にはせん断応力であることを思い出すと、この流れ則の式(3.113)は摩擦とすべりで説明した式(3.106)と同じで、塑性変形がせん断変形であることもわかる。大事なことは、式(3.113)の左辺のひずみには増分を示すドットがついているのに対し、右辺の偏差応力にはそれが無いということである。文献によっては右辺の λ にドットを付けているものもある。なお式(3.113)は後述する粘性の式(3.122)の記述によく似ているが、粘性とは異なり、右辺の λ は応力状態と応力増分に依存した比例パラメータであり、単純な材料パラメータではないことに注意すべきである。

式(3.113)からは、塑性が弾性と本質的に異なっていることが明らかになる。すなわち、塑性の場合には「塑性ひずみ増分が偏差（せん断）応力そのものと共軸であろうとする」

$$\dot{\Delta}^p \equiv 0, \quad \dot{\epsilon}^p \parallel \sigma'$$

のに対し、弾性の場合には式(3.44) (3.45) から明らかなように「弾性ひずみは応力そのものと、また弾性ひずみ増分は応力増分と共軸であろうとする」

$$\dot{\Delta}^e \propto \sigma_{AVE}, \quad \dot{\epsilon}^e \parallel \sigma'; \quad \dot{\Delta}^e \propto \dot{\sigma}_{AVE}, \quad \dot{\epsilon}^e \parallel \dot{\sigma}'$$

⁴² 単結晶体の場合には結晶格子の稠密面に相当する。

⁴³ その面上を転位と呼ばれる格子欠陥が移動し始めることに相当する。なお、一旦動いた転位は結晶粒界や材料表面に達していない限り、外力の向きを変えたときに反対に動くこともよく知られている。

⁴⁴ 増分なので上付きドットではなく $\Delta \epsilon$ と書く場合もあるが、ここでは簡単のためにすべてを速度表記にした。

⁴⁵ 前述のように、結晶金属の場合の塑性変形は転位という内部欠陥の発生や移動が原因と考えられ、内部に「隙間」が生じて移動することに対応していることから、非適合ひずみになる。

ことになる。ここに、 ϵ'_e と ϵ'_p はそれぞれ ϵ^e と ϵ^p の偏差成分である。さらに Δ^e と Δ^p はそれぞれ式 (3.14) で定義した体積ひずみの弾性成分と塑性成分であり、 σ_{AVE} は式 (3.42) で定義された平均応力である。言い換えると、変形の増分に着目したときに、「弾性ではその増分変形の向きも大きさも応力増分に直接関係している」が、「塑性では増分変形の向きは応力そのものの向きで支配されるが、増分変形の大きさは応力増分にも関係している」ことになる。これは、次のような塑性の「内部メカニズム」を考えると少しはわかり易いかもかもしれない。

つまり、図 3.17 を用いて説明したように、応力状態で規定されるある面上で「降伏条件」が満足された場合、その面の向きでそのあとの塑性変形の向きは既に決定されてしまっていると考えられる。したがって、そのあとさらに外力を増やそうとした場合、このすべり面上のすべり変形しか⁴⁶生じようとはしないだろう。このことから、その増分変形の向きはすべり出そうとするすべり面の向きで決定され、結局、増分変形の向きは応力状態そのもので支配されることになる一方で、図 3.18 に示したように、実際にすべり変形（増分）が生じるかどうかは、そこに発生する応力増分の向きと大きさにも依存する。この後半に記述した現象が「流れ則」の部分であり、前半が「降伏条件」に相当する。

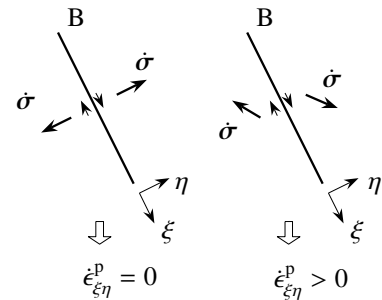


図 3.18 流れ則: 塑性変形の向き ξ - η は応力そのもの σ で決定され、その大きさは $\dot{\sigma}$ にも支配される。

(5) 増分型弾塑性構成方程式

降伏条件が式 (3.108) で与えられ、流れ則が式 (3.113) で与えられる場合の、等方弾塑性材料の増分型の構成方程式を求めておこう。ここでは具体的な例として、降伏条件式 (3.108) を

$$f \equiv \bar{\sigma} - \tau_Y(\epsilon^p) = 0 \tag{3.114}$$

と定義し直しておこう。初期降伏後の履歴依存性を明示するために、せん断降伏応力 τ_Y を塑性ひずみの関数⁴⁷として定義しておく。つまり、塑性ひずみは変形の非可逆の履歴を記憶している状態変数だと考えればいい。この f を降伏関数と呼ぶ。このとき、単調に载荷し続けて塑性変形を発生させ続けた場合には、上式 (3.114) の f は零を満足し続けるから、「载荷」という状況は

$$f = 0, \dot{f} = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}^p > 0 \tag{3.115}$$

という条件で定義できそうである。この条件の意味は初学者には難しいので、じっくり考えて欲しい。これに対し、一旦降伏した材料の外力が取り除かれ、材料が弾性に戻る「除荷」の瞬間には、 τ_Y は不変なまま降伏条件を満足しなくなろうとするので

$$f = 0, \dot{f} < 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}^p = 0 \tag{3.116}$$

で定義できそうだ。ただし、除荷後に材料が弾性状態になった時点には $f < 0$ に⁴⁸なる。なぜなら、 τ_Y が不変なまま $\bar{\sigma}$ が減少するからだ。上の二式のように、同じ応力状態 ($f = 0$ のまま) において 2 種類の変化が可能なのも、構成方程式を増分で与える必要になる理由の一つであるが、载荷の場合のその増分構成方程式は積

⁴⁶ 結晶金属の場合には、結晶格子の稠密面上の転位の移動によるせん断変形が主な塑性変形であるため、塑性的な体積変形は発生しない。これに対し、砂地盤等を連続体として取り扱う場合には、せん断に対して、砂粒が隣の砂粒に乗り上げるような変形も伴いながらすべるため、塑性的な体積変形 (ダイラタンス) が生じることがある。

⁴⁷ 厳密には塑性ひずみそのものではなく単調増加する塑性変形パラメータの関数とする必要があるが、ここでは単調载荷だけを考えることを前提として単純な表現にした。

⁴⁸ $f > 0$ という状態は存在しない。

分不可能である。なぜなら塑性変形は履歴依存性（例えばねじって引張ったときと引張ってねじったときの応答が異なる特性）を持っていて、初期状態と最終状態とだけで決定できる変形履歴ではないからだ。

式(3.115)のように載荷され続ける状態では降伏条件 $f = 0$ は満足され続けるので、式(3.114)の増分は零となり、具体的に式展開すると

$$\dot{f} = 0 = \sum_i \sum_j \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \sum_i \sum_j \frac{\partial \tau_Y}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (3.117)$$

を常に満足する。偏微分の連鎖律を使っていることには慣れて欲しい。この条件は整合条件と呼ばれている。そこで右辺の塑性ひずみ増分に式(3.113)の流れ則を代入し、さらに式(3.107)の偏微分から得られる

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}}$$

という関係を第1項に代入すれば

$$\dot{f} = \sum_i \sum_j \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} \dot{\sigma}_{ij} - \lambda \sum_i \sum_j \frac{\partial \tau_Y}{\partial \epsilon_{ij}^p} \sigma'_{ij} = 0$$

となるので、これから λ を

$$\lambda = \frac{1}{H 2\bar{\sigma}} \sum_k \sum_l \frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} \dot{\sigma}_{kl}, \quad H \equiv \sum_k \sum_l \frac{\partial \tau_Y}{\partial \epsilon_{kl}^p} \frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}}$$

と表すことができる。ここでは第11章の議論と合わせるために $2\bar{\sigma}$ で調整したもので H を定義しているが、この H は硬化係数と呼ばれる材料パラメータである。つまり、変形履歴においてせん断降伏応力 τ_Y がどのように変化するか（硬化則）という材料特性を実験等で求めておけば、硬化パラメータ H を具体的にモデル化することができる。この λ を流れ則に代入し戻すことによって、増分ひずみの塑性成分は

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{H} \sum_k \sum_l \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{4\bar{\sigma}^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (3.118)$$

と表されることになる。

一方、弾性部分が Hooke の法則の式(3.105b)を増分同士の関係に書き直した関係式で

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right) \delta_{ij} \sum_k \dot{\sigma}_{kk} \quad (3.119)$$

のように与えられることにしよう。その関係と上式(3.118)を式(3.112)に代入すれば、増分応力と増分ひずみの間を関係付ける弾塑性関係が

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right) \delta_{ij} \sum_k \dot{\sigma}_{kk} + \frac{1}{H} \sum_k \sum_l \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{4\bar{\sigma}^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (3.120)$$

と求められる。この逆関係を求めると

$$\dot{\sigma}_{ij} = \sum_k \sum_l \left\{ C_{ijkl} - \frac{\mu}{1 + H/\mu} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} \right\} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3.121)$$

となる。ここに C は式(3.49b)で定義された弾性係数である。式(3.120) (3.121) 右辺の塑性に関する項は、降伏条件が成立 ($f = 0$) している場合にのみ考慮し、弾性状態 ($f < 0$) では無視しなければならない。この式を時々刻々積分（比例載荷でない等の一般的な場合には「積分できない」⁴⁹）ので微小なステップで「足し算」をしていけば、図3.15のような非線形挙動をモデル化できるのだ。面白いでしょ。

⁴⁹ 塑性変形は履歴依存性を持っているので、その増分表現は本質的に積分できてはいけない。積分できたら弾性になってしまう。

構造力学では古典的に完全塑性モデルを用いることが多く、降伏応力を定数とし、降伏条件が満足されたあとも硬化等が起こらず ($H = 0$ に相当する), その同じ条件が満足され続けるものとすることが多い。詳細については他の文献等を参照のこと。梁や板の基礎的な構造力学では応力状態が1軸状態であることが普通であり、この文書のほとんどの箇所では複雑な増分形式の塑性理論は用いていない。塑性論については、第11章や第12.5.4節あるいは文献 [39, 73, 126, 127] 等を参照のこと。

演習問題 3-6

6. 別途文献を見ていいので、式 (3.120) から式 (3.121) の関係を求めよ。

3.4.6 ちょっとだけ粘性

塑性とは異なり、非弾性変形が時間と共に変化する性質を粘性と呼ぶ。これは式 (3.113) に似た抵抗則で、1次元状態のせん断モデルの場合は、工学ひずみ γ とせん断応力 τ を用いて

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta} \tau \quad (3.122)$$

と規定されるが、式 (3.113) の λ とは異なり η は材料パラメータである。例えば、外力が作用して応力が一定の状況にあっても、ひずみが時間と共に大きくなることもある。このような現象をクリープと呼ぶ。逆に、変形が一定の状況で最初に生じた応力が減る方向に変化してしまうこともある。それを応力緩和と呼んでいる。著者は粘性については苦手なのでこのくらいの記述に留めるが、付録 F にちょっとだけ加筆してみた。

3.4.7 材料の抵抗則に用いるひずみと応力

材料の抵抗則については、物理的解釈に基づいて何らかの材料モデルを作り、材料試験結果に基づいてその材料パラメータを同定するのが一般的な方法である。注意しないといけないのは、材料試験が行われる座標系が試験する人間の都合で特別に限定されていることである。それに対して材料モデルの方は、特に等方材料であれば座標系には依存しない表現になっていないといけない。簡単な例を挙げると、 σ_{AVE} や Δ のようなスカラー関数 (テンソルの不変量) を用いることや、主値 (主応力や主ひずみと主方向) を用いてモデルを構築するのが望ましいことになる。そのため、塑性の説明でも相当応力 $\bar{\sigma}$ 等が用いられていたのである。大事なことなので再度ここでコメントしておいた。

3.5 仮想仕事の原理

3.5.1 二つの許容場と仮想仕事の原理

(1) 厳密な仮想仕事式

第3.2節では形を変える物体の幾何学的な関係式だけを定義してまとめた。そして、変形できる物体に力を加えたり歪めたりすると形を変えることによって物体は抵抗するので、第3.3節では物体内部の抵抗力を定義し、力学的な関係式だけをまとめた。そして次の第3.4節では、物体 (材料) の抵抗の仕方 (構成則) を表すためには、第3.2節の変形と第3.3節の抵抗力を関係付けなければならないことを説明した。ただ、現実の問題で構成則を正確にモデル化することにはかなりの困難が伴う。というよりも、経年劣化等の構成則の時間変化までを含めると、そのモデル化はほぼ不可能に近い。そしてそれに対して多くの実験に基づいた経験則を構築しても、設計つまり終局状態までの材料挙動の将来予測という観点からは精度のいい解が得られる確証はほとんど無い。

それにもかかわらず我々は、ある確率の下で安全な構造を設計しなければならない。そういった状況では、力学的な条件あるいは幾何学的（運動学的）な条件の少なくとも片方だけでも満たした上で、近似的に何らかの答を知りたくなるかもしれない。具体的な使用例として第5章の有限要素法や第11章の塑性解析等が挙げられる。この節では、材料によらず成り立つ重要な関係式をまず誘導し、その応用を説明する。

まず二つの許容場を定義する必要がある。変位ベクトル \mathbf{u}^k とひずみテンソル $\boldsymbol{\epsilon}^k$ が

$$\epsilon_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} \right) \quad \text{in } V \quad (3.123)$$

を満足し、境界 S_k で

$$u_i^k = \bar{u}_i^k \quad \text{on } S_k \quad (3.124)$$

を満足しているとき、この場を運動学的許容場と呼ぶ。ここで V は物体内体積部分を表し、 S_k は幾何学的境界条件が与えられている表面部分を表す。これに対し、応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}^s$ が与えられた体積力 \mathbf{X}^s に対して

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}^s}{\partial x_j} + X_i^s = 0, \quad \sigma_{ij}^s = \sigma_{ji}^s \quad \text{in } V \quad (3.125a, b)$$

を満足し、境界 S_s で与えられた表面外力 $\bar{\mathbf{F}}^s$ に対して

$$\sum_{j=1}^3 n_j \sigma_{ji}^s = \bar{F}_i^s \quad \text{on } S_s \quad (3.126)$$

を満足しているとき、この場を静力学的許容場と呼ぶ。なお、 S_s は力が与えられた表面部分で $S_s \cup S_k = S \equiv \partial V$, $S_s \cap S_k = \emptyset$ を満たすものとする。

式 (3.125a) に任意の運動学的許容場の u_i^k を乗じて、物体内全領域で積分すると

$$\int_V \sum_{i=1}^3 u_i^k \left\{ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}^s}{\partial x_j} + X_i^s \right\} dV = 0$$

となる。これに式 (3.26) の Gauss の発散定理を用いると

$$\int_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_i^k n_j \sigma_{ji}^s dS - \int_V \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} \sigma_{ji}^s dV + \int_V \sum_{i=1}^3 u_i^k X_i^s dV = 0$$

となるので、応力のモーメントのつり合い式 (3.125b) で示された対称性⁵⁰ とひずみ変位関係式 (3.123) を用い、境界条件式 (3.124) (3.126) を考慮すると

$$\int_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji}^s \epsilon_{ij}^k dV = \int_V \sum_{i=1}^3 X_i^s u_i^k dV + \int_{S_s} \sum_{i=1}^3 \bar{F}_i^s u_i^k dS + \int_{S_k} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (n_j \sigma_{ji}^s) \bar{u}_i^k dS \quad (3.127)$$

という関係式を得ることができる。この関係を仮想仕事の原理と呼ぶ。同じ原理は、式 (3.123) に静力学的許容場の応力 σ_{ji}^s を乗じた全領域積分からも得ることができる。誘導過程から明らかのように、材料が何であるかということとは無関係に仮想仕事の原理は成立する。つまり第3.4節で議論した構成則とは一切関係無く成立する。また、運動学的許容場はつり合っている必要は無く、静力学的許容場も変形の適合場に対応している必要も無い。

⁵⁰ 以下、この対称性は暗黙のうちに用いられることになり、仮想仕事式に陽には組み込まれていない。

(2) 任意の許容場に対する仮想仕事の原理

前節の仮想仕事の原理式 (3.127) の誘導過程から明らかなように、もし式 (3.127) を次式のように解釈して

$$\int_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} \epsilon_{ij}^k dV = \int_V \sum_{i=1}^3 X_i u_i^k dV + \int_{S_s} \sum_{i=1}^3 \bar{F}_i u_i^k dS + \int_{S_k} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (n_j \sigma_{ji}) \bar{u}_i^k dS \quad (3.128)$$

が任意の運動学的許容場 \mathbf{u}^k に対して成立した場合には、これを満足する応力場 $\boldsymbol{\sigma}$ が静力学的許容場に一致することは、前節とは逆向きの過程を思い浮かべればわかるだろう。これも仮想仕事の原理と呼ばれるが、多くの文献ではこちらの方をそう呼んでいる。京都大学の西村直志先生は文献 [170] でこちらを「狭義の仮想仕事の原理」と呼んでいる。ではその逆向きの誘導過程を示しておこう。式 (3.123) のひずみ変位関係と応力の対称性を考慮して Gauss の発散定理を用い、式 (3.124) の境界条件を考慮すれば

$$\begin{aligned} & \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji} \epsilon_{ij}^k dV - \int_V \sum_i X_i u_i^k dV - \int_{S_s} \sum_i \bar{F}_i u_i^k dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i^k dS \\ &= \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV - \int_V \sum_i u_i^k X_i dV - \int_{S_s} \sum_i u_i^k \bar{F}_i dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j \bar{u}_i^k n_j \sigma_{ji} dS \\ &= \int_S \sum_i \sum_j u_i^k n_j \sigma_{ji} dS - \int_V \sum_i \sum_j u_i^k \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV - \int_V \sum_i u_i^k X_i dV - \int_{S_s} \sum_i u_i^k \bar{F}_i dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j \bar{u}_i^k n_j \sigma_{ji} dS \\ &= - \int_V \sum_i u_i^k \left[\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i \right] dV - \int_{S_s} \sum_i u_i^k \left[\bar{F}_i - \sum_j n_j \sigma_{ji} \right] dS = 0 \end{aligned}$$

のような誘導ができる。この式が、任意の運動学的許容場 \mathbf{u}^k に対して成立するためには、それぞれの被積分関数が零であればいいので、結局

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad \text{in } V, \quad \bar{F}_i = \sum_j n_j \sigma_{ji} \quad \text{on } S_s$$

でなければならない。これは静力学的許容場が満足すべき式 (3.125) (3.126) に一致する。

これに対し、今度は式 (3.127) を次のように解釈して

$$\int_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji}^s \epsilon_{ij} dV = \int_V \sum_{i=1}^3 X_i^s u_i dV + \int_{S_s} \sum_{i=1}^3 \bar{F}_i^s u_i dS + \int_{S_k} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (n_j \sigma_{ji}^s) \bar{u}_i dS \quad (3.129)$$

が任意の静力学的許容場 $\boldsymbol{\sigma}^s$ に対して成立した場合には、これを満足する変位場 \mathbf{u} は運動学的許容場に一致する。これは補仮想仕事の原理と呼ばれる。式 (3.125a) を用いて X^s を応力 $\boldsymbol{\sigma}^s$ の微係数で表して消去し、Gauss の発散定理と応力の対称性を考慮したあと、式 (3.126) の境界条件を考慮すると

$$\begin{aligned} & \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji}^s \epsilon_{ij} dV - \int_V \sum_i X_i^s u_i dV - \int_{S_s} \sum_i \bar{F}_i^s u_i dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji}^s \bar{u}_i dS \\ &= \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji}^s \epsilon_{ij} dV + \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}^s}{\partial x_j} u_i dV - \int_{S_s} \sum_i \bar{F}_i^s u_i dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji}^s \bar{u}_i dS \\ &= \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji}^s \epsilon_{ij} dV + \int_S \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji}^s u_i dS - \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji}^s \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \\ & \quad - \int_{S_s} \sum_i \bar{F}_i^s u_i dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji}^s \bar{u}_i dS \\ &= \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji}^s \epsilon_{ij} dV - \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji}^s \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji}^s (\bar{u}_i - u_i) dS \\ &= \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji}^s \left[\epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dV - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji}^s (\bar{u}_i - u_i) dS = 0 \end{aligned}$$

のような誘導ができる。この式が、任意の静力学的許容場 σ^s に対して成立するためには、それぞれの被積分関数が零であればいいので、結局

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{in } V, \quad u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } S_k$$

でなければならない。これは運動学的許容場が満足すべき式 (3.123) (3.124) に一致する。

3.5.2 ポテンシャルエネルギー — 厳密解同士の仮想仕事と変分原理

(1) 停留原理

さて、前節の静力学的許容場が解こうとしている問題の厳密解 σ の場であり、また運動学的許容場がその σ に対応したひずみと変位の厳密解のごく近傍の変動（変分）場 δu と $\delta \epsilon$ であるとする。ただし、変位の境界条件は本質的な境界条件であり、解こうとしている問題にとっては最も重要な制約条件なので、その変動だけは導入してはいけないことから

$$\delta \bar{u}_i = 0 \quad \text{on } S_k \quad (3.130)$$

とする。したがって式 (3.127) の仮想仕事の原理は、 S_k 上の境界条件の項が無くなり

$$\delta \Pi(\mathbf{u}) \equiv \int_V \sum_i \sum_j \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ji} dV - \int_V \sum_i \delta u_i X_i dV - \int_{S_s} \sum_i \delta u_i \bar{F}_i dS = 0 \quad (3.131)$$

となる。記号 δ は変動⁵¹であることを示し、 δu は仮想変位と呼ばれ、それに対応した仮想ひずみは

$$\delta \epsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right)$$

と定義した。式 (3.131) が任意の仮想変位に対して成り立つとき、対応する応力場が静力学的許容場になることは、前節で示した通りである。そして、上式 (3.131) の左辺にあるスカラー量（関数の関数：汎関数） Π の変動（第1変分）と置いてみたのだが、これは、仮想仕事の原理があるスカラー量の変動が零になる条件として解釈できるかどうかをここでは検討してみようとしているからである。

そこで、材料が式 (3.61) の一般化された Hooke の法則を満足し、弾性係数は式 (3.64) の対称性も満足しているものとする

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\mathbf{u}) &= \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta \epsilon_{ij} C_{jkl} \epsilon_{kl} dV - \int_V \sum_i \delta u_i X_i dV - \int_{S_s} \sum_i \delta u_i \bar{F}_i dS \\ &= \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \frac{1}{2} \left\{ \delta \epsilon_{ij} C_{jkl} \epsilon_{kl} + \epsilon_{ji} C_{jkl} \delta \epsilon_{lk} \right\} dV - \int_V \sum_i \delta u_i X_i dV - \int_{S_s} \sum_i \delta u_i \bar{F}_i dS \\ &= \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \frac{1}{2} \delta \left\{ \epsilon_{ij} C_{jkl} \epsilon_{kl} \right\} dV - \int_V \sum_i \delta u_i X_i dV - \int_{S_s} \sum_i \delta u_i \bar{F}_i dS \end{aligned}$$

となる。そこで、式 (3.65) のひずみエネルギーを誘導したときと同じように、上式 $\delta \Pi$ を変位 \mathbf{u} についての全微分のようなものと解釈して、それを変位で積分（関数で積分）すると

$$\Pi(\mathbf{u}) \equiv \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ij} C_{jkl} \epsilon_{kl} dV - \int_V \sum_i u_i X_i dV - \int_{S_s} \sum_i u_i \bar{F}_i dS \quad (3.132)$$

を得る。ただし、外力 \mathbf{X} , $\bar{\mathbf{F}}$ は与えられたもので変位には依存しない量であるとしている。この式で定義される Π を全ポテンシャルエネルギーと呼ぶ。右辺第1項はひずみエネルギーであり、右辺第2, 3項はそれぞれ体積力・

⁵¹ 第3.5.1節の厳密な仮想仕事の原理の二つの場の絶対値の大きさには制限が無かった。西野文雄先生は、「つり合っている系は力が作用していないのと同じだから、それを何メートル動かしても仕事をしない、というのが仮想仕事の原理」とおっしゃっていた。ただこの節では、あとで積分と同じ操作をするのでこれを「微分量」に相当する「関数のちょっとした変動（変分）」と捉える。

表面力の外力ポテンシャルと⁵²呼ばれる。そして式(3.131)は、その汎関数 Π の第1変分が零という(ちょうどある関数 $f(x)$ の微係数が零というのと同じ)条件と捉えることができるので、式(3.131)を全ポテンシャルエネルギーの停留原理

$$\delta\Pi = 0 \quad \leftrightarrow \quad \Pi \rightarrow \text{停留}$$

と呼んでいる。つまり、このような厳密解によって表された仮想仕事の原理は停留原理である。「変分」という言葉については第5.4.3節等で勉強して欲しい。

(2) 停留原理から得られる支配方程式

特に、ここで仮定したように弾性係数が式(3.64)の対称性を満足して、かつ安定な材料であれば、ひずみエネルギーは形式的に正定値の2次形式となるので、この停留原理は「最小原理」

$$\delta\Pi = 0, \quad \delta^2\Pi > 0 \quad \leftrightarrow \quad \Pi \rightarrow \text{最小}$$

になる。 $\delta^2\Pi$ を汎関数 Π の第2変分と呼ぶが、ちょうどある関数 $f(x)$ が下に凸になる条件が関数 f の2階の微係数が正であることと同じである。そして、第3.5.1(2)節の前半にその具体的な誘導過程を示した(\mathbf{u}^k と ϵ^k を $\delta\mathbf{u}$ と $\delta\epsilon$ に置き換えればいい)ように、この最小原理からはその被積分関数に静力学的許容場が満足すべき支配方程式、つまり、つり合い式(3.125)と境界条件式(3.126)を得る。この被積分関数に得られる微分方程式は、変分原理のEuler方程式と呼ばれている。

では、 Π を最小にした厳密解による Π の最小値 Π_{MIN} を求めるために、上のつり合い式の \mathbf{X} を式(3.132)の右辺第2項に代入すると

$$\Pi_{\text{MIN}} = \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \epsilon_{ij} \sigma_{ji} dV + \int_V \sum_i \sum_j u_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV - \int_{S_s} \sum_i u_i \bar{F}_i dS$$

を得る。この第2項にGaussの発散定理を適用して力の境界条件を考慮すると

$$(\text{第2項}) = \int_{S_s} \sum_i u_i \sum_j n_j \sigma_{ji} dS - \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV = \int_{S_s} \sum_i u_i \bar{F}_i dS - \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV \quad (*)$$

となる。さらに上式(*)の第2項を無理やり二つに分けて

$$[\text{式(*)第2項}] = \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV = \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV + \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} dV$$

のように書き直すことができる。そこでモーメントのつり合い式(3.23)から応力は対称なので

$$[\text{式(*)第2項}] = \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV + \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \sigma_{ji} dV = \int_V \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \sigma_{ji} dV$$

と書いてもいいから、式(3.6)のひずみと変位の関係をこれに代入すると、結局 Π_{MIN} の第2項は

$$(\text{第2項}) = \int_{S_s} \sum_i u_i \bar{F}_i dS - \int_V \sum_i \sum_j \epsilon_{ij} \sigma_{ji} dV$$

となる。これを上の Π_{MIN} の第2項に代入し直すことによって

$$\Pi_{\text{MIN}} = -\frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \epsilon_{ij} \sigma_{ji} dV \quad (3.133)$$

のように、最小値はひずみエネルギーの値を負にしたものになる。ちょっとだけ興味深くないですか。

⁵² ひずみエネルギーは弾性ポテンシャルエネルギーとも呼ばれ、負符号付きの外力ポテンシャルは外力のポテンシャルエネルギーとも呼ばれる。そのため、この文書ではその和に「全」を付けて呼ぶことにした。

(3) 全補ポテンシャルエネルギー

今度は逆に、式(3.127)の運動学的許容場の方が解こうとしている問題の厳密解 \mathbf{u} の場であり、静力学的許容場がその \mathbf{u} に対応した応力の厳密解のごく近傍の変動場 $\delta\boldsymbol{\sigma}$ である場合を考えてみよう。すると仮想仕事の原理式(3.127)は

$$\delta\Pi^*(\boldsymbol{\sigma}) = \int_V \sum_i \sum_j \delta\sigma_{ji} \epsilon_{ij} dV - \int_V \sum_i \delta X_i u_i dV - \int_{S_s} \sum_i \delta \bar{F}_i u_i dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j (n_j \delta\sigma_{ji}) \bar{u}_i dS = 0$$

と書くことができる。ここに $\delta\mathbf{X}$ と $\delta\bar{\mathbf{F}}$ は応力変動に対応した外力の変動である。前節で示したように、この式が任意の変動 $\delta\boldsymbol{\sigma}$ に対して成立する条件からは、運動学的許容場が満足すべき式(3.123) (3.124) が求められる。これも(狭義の)補仮想仕事の原理と呼ばれる。そこで、材料が式(3.61)の一般化された Hooke の法則を満足するとする。また、弾性係数は式(3.64)の対称性も満足しているものとする、式(3.58)のコンプライアンス \mathbf{D} も同様の対称性を持つ。これを用いると上式は

$$\delta\Pi^* = \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta\sigma_{ji} D_{ijkl} \sigma_{kl} dV - \int_V \sum_i \delta X_i u_i dV - \int_{S_s} \sum_i \delta \bar{F}_i u_i dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \delta\sigma_{ji} \bar{u}_i dS = 0$$

と書くこともできる。そこで、もし第2,3項の外力に関して

$$u_i = \frac{\partial\Psi_X}{\partial X_i} \quad \text{in } V, \quad u_i = \frac{\partial\Psi_{\bar{F}}}{\partial \bar{F}_i} \quad \text{on } S_s \quad (3.134)$$

を満足する二つのスカラーポテンシャル Ψ_X と $\Psi_{\bar{F}}$ が存在する場合には、上式は積分できて

$$\Pi^*(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sigma_{ji} D_{ijkl} \sigma_{kl} dV - \int_V \Psi_X dV - \int_{S_s} \Psi_{\bar{F}} dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i dS \quad (3.135)$$

というスカラー量が定義できるようになる。この Π^* を全補ポテンシャルエネルギーと呼び、停留(最小)原理は全補ポテンシャルエネルギーに対しても成立する。

(4) 非圧縮性弾性体の支配方程式

第3.4.3(3)節で誘導した非圧縮性材料の構成方程式(3.85)は、結果を知っている人だからこそ求められたと感じた読者がいるかもしれない。ここではもう少し客観的な誘導を行っておこう。Hooke の法則に従う弾性体の全ポテンシャルエネルギーは式(3.132)で表されていた。そこで、式(3.83b)で表される非圧縮性の制約条件付きで、この全ポテンシャルエネルギーを停留させることによって、非圧縮性弾性体の支配方程式等を誘導してみる。そのために、式(3.83b)の制約条件にペナルティ p を乗じて式(3.132)に付加した汎関数

$$\Pi_i \equiv \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \epsilon_{ij} \sigma_{ji} dV - \int_V \sum_i u_i X_i dV - \int_{S_s} \sum_i u_i \bar{F}_i dS - \int_V p \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV \quad (3.136)$$

を考えてみる。このペナルティ p は Π_i を最小化するときの高額な罰金と考えればよく、その罰金を払いたくなくなるような最小化によって、式(3.83b)を是が非でも満足させようとしていると考えればよい。数学の言葉を使うと p は **Lagrange** の未定乗数と呼ばれる。これに対して変位 \mathbf{u} と未定乗数 p を変動させた停留原理から支配方程式を求めよう。式(3.136)の最初の3項の変分は第3.5.1(2)、3.5.2(2)節で求めてあるので、第4項だけの変分をとると

$$\begin{aligned} -\delta \left[\int_V p \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV \right] &= - \int_V \delta p \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV - \int_V p \sum_i \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_i} dV \\ &= - \int_V \delta p \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV - \int_S \sum_i \delta u_i n_i p dS + \int_V \sum_i \delta u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} dV \\ &= - \int_V \delta p \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV - \int_{S_s} \sum_i \delta u_i \sum_j n_j \delta_{ji} p dS + \int_V \sum_i \delta u_i \sum_j \delta_{ji} \frac{\partial p}{\partial x_j} dV \end{aligned}$$

となる。なお、第2行から第3行への式変形では式(3.130)のように S_k で δu_i が零であることを用いている。第2, 3項では Kronecker のデルタの定義を利用して、無理やり

$$n_i = \sum_j n_j \delta_{ji}, \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \sum_j \delta_{ji} \frac{\partial p}{\partial x_j}$$

と置いたが、初学者は今ではわからなくてもいい。これと式(3.136)の最初の3項の変分とを統合すると、最終的に仮想仕事式

$$\begin{aligned} \delta \Pi_i = & - \int_V \sum_i \delta u_i \left[\sum_j \frac{\partial (\sigma_{ji} - p \delta_{ji})}{\partial x_j} + X_i \right] dV \\ & - \int_{S_s} \sum_i \delta u_i \left[\bar{F}_i - \sum_j n_j (\sigma_{ji} - p \delta_{ji}) \right] dS - \int_V \delta p \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} dV = 0 \end{aligned}$$

を得る。

これが変位と罰金の任意の変動 δu , δp に対して成立するためには、それぞれの被積分関数が零であればいい。したがってまず第3項からは、非圧縮性の条件式(3.83b)

$$\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad \text{in } V \quad (3.137)$$

を得ることができる。次に第2項の括弧の中は力の境界条件になっているはずなので、ここでは「実質的な応力」 σ^* を新たに

$$\sigma_{ij}^* \equiv \sigma_{ij} - p \delta_{ij} \quad (3.138)$$

で定義すると、その力の境界条件が

$$\sum_j n_j \sigma_{ji}^* = \bar{F}_i \quad \text{on } S_s \quad (3.139)$$

と表され、式(3.24b)に形式的には一致する。最後に、第1項からつり合い式が

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}^*}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad \text{in } V \quad (3.140)$$

と求められる。式(3.46)の Hooke の法則を式(3.138)に代入し、式(3.137)の非圧縮性を考慮すると

$$\sigma_{ij}^* = 2\mu \epsilon_{ij} - p \delta_{ij} = 2\mu \epsilon'_{ij} - p \delta_{ij} \quad (3.141)$$

を得る。これは式(3.85)に形式的に一致する。したがって、変位で表したつり合い式は式(3.86a)に一致し、力の境界条件式(3.139)も

$$\sum_j n_j \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - p \delta_{ij} \right\} = \bar{F}_i \quad \text{on } S_s \quad (3.142)$$

と求められる。この定式化からは Poisson 比が $\nu = 1/2$ であるといった構成則についての情報が得られないどころか必要も無く、体積弾性係数 K の関与が自動的に消滅するだけというのは非常に興味深い⁵³。

3.5.3 相反定理 — 異なる問題同士の仮想仕事式

ここは読み飛ばしてもいいが面白いよ。物体中の点 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ に大きさ $p^{\boldsymbol{\xi}}$ の集中外力だけが作用しているとき、式(3.22)のつり合い式にある分布外力 \mathbf{X} を

$$X_i(\mathbf{x}) = p_i^{\boldsymbol{\xi}} \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}), \quad \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \equiv \delta(x_1; \xi_1) \delta(x_2; \xi_2) \delta(x_3; \xi_3)$$

⁵³ 非圧縮性弾性体で近似モデル化される空気と水もそれぞれ $K_{\text{air}} = 0.14 \text{ MN/m}^2$ や $K_{\text{water}} = 2.06 \text{ GN/m}^2$ 等の体積弾性係数の値を持つ。

と表すことができる。この $\delta(x_i; \xi_i)$ は Dirac のデルタ関数と呼ばれる。1次元の場合の直感的な解釈を図 4.49 に示し、その正確な定義を式 (4.57) に与えた。最も重要な性質は

$$\int_V f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dV = f(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{if } \boldsymbol{\xi} \in V \quad (*)$$

になるということである。 $\delta(x_i; \xi_i)$ を「関数」と書いたが、本当は「超関数」と呼ばれる特殊な数学的概念で、集中外力を表現するときによく用いられるので、ここでは「あー、そういうものか」と受け止めるに留め、上式 (*) が成立することを信用⁵⁴して欲しい。さて図 3.19 の左側の図のように、この集中外力だけが作用したときに生じた応力と変位をそれぞれ $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ とすると、つり合い式と境界条件式は

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})}{\partial x_j} + p_i^\xi \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad u_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = 0 \text{ on } S_K, \quad \sum_j n_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = 0 \text{ on } S_S \quad (a)$$

となる。ここに表面 S のうち、 S_K は変位を固定した境界であり、 S_S は表面外力を与えていない自由表面で、 $S_K \cap S_S = \emptyset$, $S_K \cup S_S = S$ とする。一方、同じ境界条件が与えられた同じ物体の $\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}$ に集中外力 q^η のみ⁵⁵が作用したときの応力と変位をそれぞれ $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta})$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta})$ とすると、そのつり合い式と境界条件式は

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta})}{\partial x_j} + q_i^\eta \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) = 0, \quad u_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ on } S_K, \quad \sum_j n_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ on } S_S \quad (b)$$

である。

そこで、前節で説明した仮想仕事をこの二つの問題の間で考えてみる。すなわち、式 (a) のつり合い式にもう一つの問題の変位 $u_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta})$ を乗じて仕事を算定し、それを物体全体で合計すると

$$\int_V \sum_i u_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) \left\{ \sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})}{\partial x_j} + p_i^\xi \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \right\} dV = 0$$

となる。第1項に Gauss の発散定理を用い、第2項に上式 (*) を用いると

$$\int_S \sum_i \sum_j u_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) n_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dS - \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta})}{\partial x_j} \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dV + \sum_i p_i^\xi u_i(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta}) = 0$$

となる。特にデルタ関数の使い方については、式をじっくり眺めて比べて欲しい。式 (a) の力の境界条件と式 (b) の変位の境界条件を第1項に代入すれば、それは零になる。第2項の被積分関数にある応力が対称であることとひずみの定義式 (3.6) を考慮すれば、結局上式は

$$\int_V \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \sigma_{ji} dV = \int_V \sum_i \sum_j \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dV = \sum_i p_i^\xi u_i(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta})$$

となる。これに式 (3.61) の応力ひずみ関係を代入すると

$$\int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) C_{jilk} \epsilon_{lk}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dV = \sum_i p_i^\xi u_i(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta}) \quad (c)$$

と表すことができる。これと全く同じような仮想仕事を、式 (b) のつり合い式に式 (a) の問題の変位 $u_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ を乗じて算定すると、最終的に

$$\int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) C_{jilk} \epsilon_{lk}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) dV = \sum_i q_i^\eta u_i(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\xi}) \quad (d)$$

⁵⁴ Northwestern 大学の村外志夫先生は講義でときどき 'Believe me!' とおっしゃった。多分、説明するのが面倒だったのだらうと思う。

⁵⁵ 異なる位置の集中外力には異なる記号 p, q を用いているが、相反定理が視覚的に理解し易くなるように上付き添え字を付けてある。

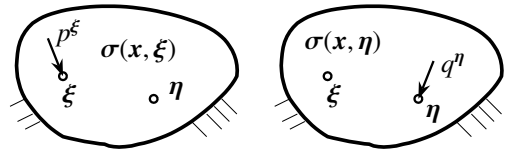


図 3.19 相反定理：載荷点と観測点の入れ替え

を得る。この両式 (c) (d) を辺々引き、左右の辺を入れ替えると

$$\sum_i p_i^\xi u_i(\xi; \eta) - \sum_i q_i^\eta u_i(\eta; \xi) = \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \eta) (C_{jilk} - C_{lkji}) \epsilon_{lk}(\mathbf{x}; \xi) dV \quad (e)$$

という関係が成立する。

ここで、もしエネルギー密度関数が存在するモデルで材料特性を表すことができるのであれば、式 (3.64) の対称性が成立する (自己随伴系になる) ので、上式 (e) の右辺が零になることから、結局

$$\sum_i p_i^\xi u_i(\xi; \eta) = \sum_i q_i^\eta u_i(\eta; \xi) \rightarrow \mathbf{p}^\xi \cdot \mathbf{u}(\xi; \eta) = \mathbf{q}^\eta \cdot \mathbf{u}(\eta; \xi) \quad (3.143)$$

が成り立つ。これは **Betti** の相反定理と呼ばれている。さらに \mathbf{p}^ξ と \mathbf{q}^η は任意なので、 $\mathbf{p}^\xi = \mathbf{q}^\eta = \mathbf{1}$ とすれば

$$\mathbf{u}(\xi; \eta) = \mathbf{u}(\eta; \xi) \quad (3.144)$$

という関係が成立し、これは **Maxwell** の相反定理と呼ばれる。つまり、「ある物体の $\mathbf{x} = \xi$ に単位の集中外力を作用させたときの $\mathbf{x} = \eta$ の位置の変位は、逆に $\mathbf{x} = \eta$ に同じ向き単位の集中外力を作用させたときの $\mathbf{x} = \xi$ の位置の変位と等しくなる」ことを意味している。ちょっと不思議でなかなか信じられないような結論であるが、これが自己随伴系を持つ著名な特性である。逆に考えると、複合材料のように内部に微視構造が存在して複雑な異方性が存在する材料の場合には、式 (3.64) の対称性が成立しない場合があり、そのときには相反定理は成立しない。そして、随伴系のひずみ ϵ^* で表した見かけ上のつり合い式と力学的境界条件式も

$$\sum_j \frac{\partial \left(\sum_k \sum_l \epsilon_{lk}^* C_{lkji} \right)}{\partial x_j} + X_i = 0, \quad \sum_j n_j \left(\sum_k \sum_l \epsilon_{lk}^* C_{lkji} \right) = F_i$$

となるので、一般 ($C_{ijkl} \neq C_{klij}$ の場合) には随伴系は物理的な意味を持たない。

ところで、この節における相反定理の証明には応用数学の講義からの知識を用いてある。多分、我が国の多くの構造力学・材料力学の教科書 (第1著者が学生のときに指定された著名な材料力学の教科書も含み) では、簡単に言うと、式 (3.64) の代わりに剛性行列のような影響係数の対称性で変位の相反性を証明してあったと記憶する。しかし本当は、なぜ剛性行列が対称になるかを証明していない (自己随伴系であることを明記していない) から、あまり正確な証明にはなっていないと感じた。それがここに証明を載せた理由である。

さて、東京工業大学の森勉先生と勉強していたときに先生が証明した相反性 (次節で紹介する) が面白かったのだが、それは上の相反定理を一般化したものの一つだとわかった。そのような一般化は文献 [27] でも行われているが、ここではその一部に

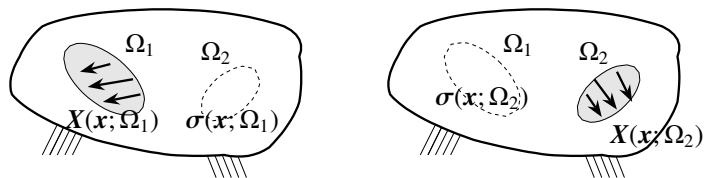


図 3.20 やや一般化した相反定理

ついて考察する。図 3.20 にあるように、物体中のある領域 $\mathbf{x} \in \Omega_1$ に分布外力 $\mathbf{X}(\Omega_1)$ が作用していたとき、生じる応力と変位をそれぞれ $\sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1)$, $u_i(\mathbf{x}; \Omega_1)$ と表すことにすると、つり合い式と境界条件式は

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_1)}{\partial x_j} + X_i(\mathbf{x}; \Omega_1) = 0, \quad u_i(\mathbf{x}; \Omega_1) = 0 \text{ on } S_K, \quad \sum_j n_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_1) = 0 \text{ on } S_S \quad (f)$$

となる。一方、同じ境界条件が与えられた同じ物体の $\mathbf{x} \in \Omega_2$ の領域に集中外力 $\mathbf{X}(\Omega_2)$ のみが作用したとすると、そのつり合い式と境界条件式は

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_2)}{\partial x_j} + X_i(\mathbf{x}; \Omega_2) = 0, \quad u_i(\mathbf{x}; \Omega_2) = 0 \text{ on } S_K, \quad \sum_j n_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_2) = 0 \text{ on } S_S \quad (g)$$

である。

前述の相反定理の誘導と同様、この二つの系同士の仮想仕事を求めてみる。すなわち、式 (f) のつり合い式にもう一つの問題の変位 $u_i(\mathbf{x}; \Omega_2)$ を乗じて仕事を算定し、それを物体全体で積分すると

$$\int_V \sum_i u_i(\mathbf{x}; \Omega_2) \left\{ \sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_1)}{\partial x_j} + X_i(\mathbf{x}; \Omega_1) \right\} dV = 0$$

と表される。この第1項に Gauss の発散定理を用いると

$$\int_S \sum_i \sum_j u_i(\mathbf{x}; \Omega_2) n_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_1) dS - \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i(\mathbf{x}; \Omega_2)}{\partial x_j} \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_1) dV + \int_{\Omega_1} \sum_i X_i(\mathbf{x}; \Omega_1) u_i(\mathbf{x}; \Omega_2) dV = 0$$

となる。第3項は、荷重が Ω_1 にしか作用していないことから積分範囲は Ω_1 の中だけになる。式 (f) の力の境界条件と式 (g) の変位の境界条件を第1項に代入すれば、それは零になり、さらに第2項の被積分関数にある応力が対称であることとひずみの定義式とを考慮すれば、結局上式は

$$\int_V \sum_i \sum_j \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_2) \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_1) dV = \int_{\Omega_1} \sum_i X_i(\mathbf{x}; \Omega_1) u_i(\mathbf{x}; \Omega_2) dV$$

となる。これに Hooke の法則を代入すると

$$\int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_2) C_{jilk} \epsilon_{lk}(\mathbf{x}; \Omega_1) dV = \int_{\Omega_1} \sum_i X_i(\mathbf{x}; \Omega_1) u_i(\mathbf{x}; \Omega_2) dV \quad (h)$$

と表すことができる。さて同様に、式 (g) のつり合い式に式 (f) の問題の変位 $u_i(\mathbf{x}; \Omega_1)$ を乗じた仮想仕事を算定すると、最終的に

$$\int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) C_{jilk} \epsilon_{lk}(\mathbf{x}; \Omega_2) dV = \int_{\Omega_2} \sum_i X_i(\mathbf{x}; \Omega_2) u_i(\mathbf{x}; \Omega_1) dV \quad (i)$$

を得る。この両式 (h) (i) を辺々引き、もし $C_{ijkl} = C_{klij}$ が成立すれば

$$\int_{\Omega_1} \sum_i X_i(\mathbf{x}; \Omega_1) u_i(\mathbf{x}; \Omega_2) dV = \int_{\Omega_2} \sum_i X_i(\mathbf{x}; \Omega_2) u_i(\mathbf{x}; \Omega_1) dV \quad (3.145)$$

という関係が成立する。もし荷重 \mathbf{X} が集中荷重のときは、この式は前述のような二つの「点」の間で成立する Betti の相反定理になる。この物理的な意味に思いを巡らすと面白くないですか。こんな等式が成立するはずがないとも感じるし、だから何なの? というのも正直な気持ちだろう。が、ひよっとするとこれがとても便利な関係式を生み出さないとはいえないのだが。

3.5.4 非弾性ひずみに関する相反性

さて唐突ではあるが、前節で導入した仮想仕事のもう一つの例として、図 3.21 の左図のような等方弾性無限体 D 中に二つの異なる領域 Ω_1, Ω_2 を設定し、そこに例えば熱ひずみが導入され

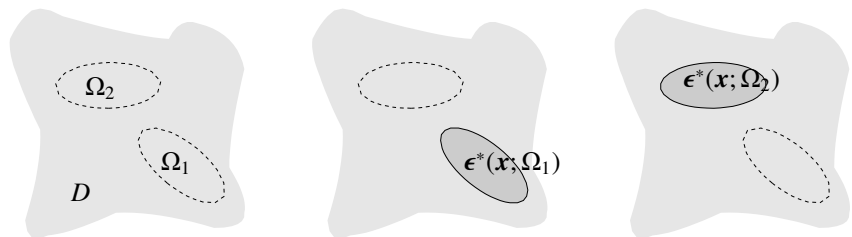


図 3.21 対象とする二つの問題と相反性

た（製造過程で熱等の作用による残留ひずみが発生した）ような、次の二つの異なる問題を考えよう。外力は作用しないものとし、図 3.21 の右側の二つの図のように、片方の領域 Ω_m ($m = 1, 2$) だけに非弾性ひず

み $\epsilon^*(\mathbf{x}; \Omega_m)$ (熱ひずみ) が分布したときの全領域の変位と応力・総ひずみ・弾性ひずみをそれぞれ $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \Omega_m)$, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \Omega_m)$, $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}; \Omega_m)$, $\boldsymbol{\epsilon}^e(\mathbf{x}; \Omega_m)$ と表す。 $m = 1, 2$ の場合のそれぞれを「問題1」「問題2」と呼ぶことにすると、各問題 m の Hooke の法則とひずみ変位関係式(3.105) で示したように

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_m) = \sum_k \sum_l C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e(\mathbf{x}; \Omega_m), \quad \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_m) = \epsilon_{ij}^e(\mathbf{x}; \Omega_m) + \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_m) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x}; \Omega_m)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x}; \Omega_m)}{\partial x_i} \right) \quad (a, b)$$

である。外力が作用していないので、無限遠点の力の境界条件式と物体内のつり合い式については

$$\sum_j n_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_m) = 0 \quad \text{on } \partial D, \quad \sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_m)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{in } D \quad (c)$$

が成り立つ。ここに \mathbf{n} は物体無限遠境界の (概念的な) 外向き法線ベクトルである。

問題1 で生じた応力と問題2 で生じた弾性ひずみがする仕事 $W(\Omega_1; \Omega_2)$ を

$$W(\Omega_1; \Omega_2) \equiv \int_D \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) \epsilon_{ij}^e(\mathbf{x}; \Omega_2) dV \quad (d)$$

と定義する。この式に Hooke の法則式 (a) を代入すると

$$W(\Omega_1; \Omega_2) \equiv \int_D \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \{C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e(\mathbf{x}; \Omega_1)\} \epsilon_{ij}^e(\mathbf{x}; \Omega_2) dV$$

となるが、等方弾性体の場合は $C_{ijkl} = C_{klij}$ という対称性を持つので、上式の (ij) と (kl) の組を入れ替えてもいいから、被積分関数にその演算を続けると

$$\begin{aligned} \sum_{ijkl} \{C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e(\mathbf{x}; \Omega_1)\} \epsilon_{ij}^e(\mathbf{x}; \Omega_2) &= \sum_{ijkl} C_{klij} \epsilon_{kl}^e(\mathbf{x}; \Omega_1) \epsilon_{ij}^e(\mathbf{x}; \Omega_2) = \sum_{ijkl} \epsilon_{kl}^e(\mathbf{x}; \Omega_1) \{C_{klij} \epsilon_{ij}^e(\mathbf{x}; \Omega_2)\} \\ &= \sum_{ijkl} \{C_{klij} \epsilon_{ij}^e(\mathbf{x}; \Omega_2)\} \epsilon_{kl}^e(\mathbf{x}; \Omega_1) = \sum_k \sum_l \sigma_{kl}(\mathbf{x}; \Omega_2) \epsilon_{kl}^e(\mathbf{x}; \Omega_1) \end{aligned}$$

のように Ω_1 と Ω_2 が入れ替えられることに帰着するので

$$W(\Omega_1; \Omega_2) = W(\Omega_2; \Omega_1) \quad (3.146)$$

が成立する。異なる問題の解同士の内積 (前節の仮想仕事) なので物理的な意味はよくわからないし、この式自体も非常に不思議な関係だと感じて構わない。確かに不思議だ。

一方、式 (d) に式 (b) を代入して応力の対称性 ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) を利用し、 Gauss の発散定理を用いると

$$\begin{aligned} W(\Omega_1; \Omega_2) &= \int_D \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) (\epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_2) - \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_2)) dV \\ &= \int_D \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) \frac{\partial u_j(\mathbf{x}; \Omega_2)}{\partial x_i} dV - \int_D \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_2) dV \\ &= \int_{\partial D} \sum_i \sum_j \{n_i \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1)\} u_j(\mathbf{x}; \Omega_2) dS - \int_D \sum_i \sum_j \left\{ \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1)}{\partial x_i} \right\} u_j(\mathbf{x}; \Omega_2) dV \\ &\quad - \int_{\Omega_2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_2) dV \end{aligned}$$

を得る。 $\epsilon^*(\mathbf{x}; \Omega_2)$ が領域 Ω_2 だけで定義されていることから右辺第3項は Ω_2 上だけの積分になっている。さらに、式 (c) の境界条件式とつり合い式によって上式右辺の最初の2項の括弧の中は零になるので、結局

$$W(\Omega_1; \Omega_2) = - \int_{\Omega_2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_2) dV \quad (e)$$

という関係式を得る。逆に、問題2で生じた応力と問題1で生じた弾性ひずみがする仕事 $W(\Omega_2; \Omega_1)$ に対しても同様の演算をすると

$$W(\Omega_2; \Omega_1) = - \int_{\Omega_1} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_2) \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_1) dV \quad (f)$$

を得る。ところが、式(3.146)が成立していたので、最終的に式(e)と式(f)は等しくなり

$$\int_{\Omega_2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_2) dV = \int_{\Omega_1} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_2) \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_1) dV \quad (3.147)$$

が成立する。「因果」の入れ替え可能という観点からは、これも相反性と呼んでもよさそうだ。奇妙だが興味深い。これは東京工業大学の森勉先生が遊びにいらしたときに教えてくださった証明である。何に利用できるかって? 森勉先生に聞いてください。

3.5.5 弾性体の単位荷重法と Green 関数

第4章で定義する単位荷重法は構造力学でよく用いられる便利な手法だが、それを3次元の弾性体に対して定式化しておく。対象とする物体のある力学問題Aの変位とひずみ・応力がそれぞれ \mathbf{u} , $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ で、式(3.6)のひずみ変位関係を満足し、構成則の式(3.49)あるいは式(3.59)を満足しているものとする。簡単のために変位は

$$u_i = 0 \quad \text{on } S_K$$

のように、幾何学的な「零」境界条件を満足しているものとする。ただし、とりあえずこの段階では条件はこれだけであり、必ずしも問題Aがなんらかの境界値問題の解である必要は無い。構成則は満足しているが、本質的には運動学的許容場である。

これに対し、同じ対象の物体中に単位の集中外力「だけ」を作用させたときに生じるひずみが $\boldsymbol{\epsilon}''$ で応力が $\boldsymbol{\sigma}''$ で、問題Aと同じ構成則を満足し、さらにこちらは

$$\sum_j \frac{\partial \sigma''_{ji}}{\partial x_j} + f_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad \sigma''_{ij} = \sigma''_{ji} \quad (a)$$

のつり合い式を満足しているものとする。これも構成則は満足しているが、変位つまり幾何学的な場については何も条件を付けていないので、本質的には静力学的許容場である。ここに $f_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ は $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ に作用している単位の集中外力ベクトル成分で、大きさが単位、つまり

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1$$

を満足するので、この単位集中外力ベクトル \mathbf{f} は

$$\mathbf{f} = \sum_i f_i \mathbf{e}_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{e}_f \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{e}_f \equiv \sum_i f_i \mathbf{e}_i \quad (b)$$

で与えられる。つまり大きさが1で \mathbf{e}_f の方向に作用する集中外力である。外力はこの単位集中外力だけなので、境界条件は力学的境界条件の

$$\sum_j n_j \sigma''_{ji} = 0 \quad \text{on } S_s$$

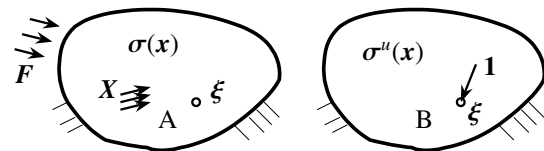


図 3.22 単位荷重法

だけが与えられているものとする。こちらを便宜上問題 B と呼ぶ。

問題 B のつり合い式 (a) と問題 A の変位 \mathbf{u} との仮想仕事をとり、 Gauss の発散定理を用いると

$$\sum_i \int_V u_i \left\{ \sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}^u}{\partial x_j} + f_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \right\} dV = \sum_i \sum_j \int_S u_i n_j \sigma_{ji}^u dS - \sum_i \int_V \left\{ \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ji}^u - u_i f_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \right\} dV = 0 \quad (c)$$

となるが、第 1 項の面積積分の境界項は両方の問題の境界条件から零になる。一方、体積積分中の第 2 項は \mathbf{u} と \mathbf{f} の内積なので、式 (b) を用いてデルタ関数の性質を用いると

$$\sum_i \int_V u_i f_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dV = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{e}_f = u_f(\boldsymbol{\xi})$$

と書くことができる。この $u_f(\boldsymbol{\xi})$ は $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ の変位 \mathbf{u} の \mathbf{e}_f 方向成分、つまり作用させた単位外力方向の変位成分である。さらに、式 (c) の体積積分中の第 1 項は、ひずみ変位関係式 (3.6) と構成則式 (3.59) を考慮すると

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ji}^u dV &= \sum_i \sum_j \int_V \epsilon_{ji} \sigma_{ji}^u dV = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V D_{jikl} \sigma_{kl} \sigma_{ji}^u dV \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V \sigma_{ij}^u D_{ijkl} \sigma_{kl} dV \end{aligned}$$

となるので、これを上式に代入して左右の辺を入れ替えれば

$$u_f(\boldsymbol{\xi}) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V \sigma_{ij}^u D_{ijkl} \sigma_{kl} dV \quad (3.148)$$

という関係を得る。つまり、問題 A のある点の変位は、その点に単位の集中外力を作用させて得られる問題 B の応力と問題 A の応力を用いて、この積分公式で求めることができることを示している。これを「弾性体の単位荷重法」と呼ぶことにする。

もし問題 A の境界上の点 $\boldsymbol{\xi}$ の変位を求めるために単位集中外力を境界上に与える場合には、上述の問題 B の分布外力 $f_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ は不要で、境界表面の点 $\boldsymbol{\xi}$ の境界条件を式 (b) で定義した外力 \mathbf{f} を用いて

$$\sum_j n_j \sigma_{ji}^u = f_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$$

のように与えればよい。結局、仮想仕事式 (c) の境界項が

$$\sum_i \sum_j \int_S u_i n_j \sigma_{ji}^u dS = \sum_i u_i(\boldsymbol{\xi}) f_i = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{e}_f = u_f(\boldsymbol{\xi})$$

となるので、最終的には式 (3.148) と同じ結果を得る。

さらに、もし $C_{ijkl} = C_{klij}$ が成立する自己随伴系の場合には、上の体積積分の第 1 項は

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \int_V \epsilon_{ji} \sigma_{ji}^u dV &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V \epsilon_{ji} C_{jikl} \epsilon_{kl}^u dV = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V C_{klij} \epsilon_{ji} \epsilon_{kl}^u dV \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V \sigma_{kl} D_{klmn} \sigma_{mn}^u dV = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V \sigma_{ij} D_{ijkl} \sigma_{kl}^u dV \end{aligned}$$

と書き直してもいいから、式 (3.148) の被積分関数の順番が可換になって

$$u_f(\boldsymbol{\xi}) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V \sigma_{ij} D_{ijkl} \sigma_{kl}^u dV \quad (3.149)$$

という関係も成立する。例えば静力学的な応力だけの解を（ある意味で近似的あるいはいい加減に）求められれば、それを用いた式 (3.148) あるいは式 (3.149) から任意点の変位を求めることができる。具体的な利用法については構造力学の「単位荷重法」を参照のこと。

ここまでは問題 A を何らかの境界値問題としては設定してなかったが、問題 A が式 (3.22) (3.23) のつり合い式を満足し、外力 \mathbf{F} が与えられた表面では力学的境界条件を満足しているものとする。これに対し、問題 B の変位 \mathbf{u}^u もひずみ変位関係と問題 A と同じ幾何学的境界条件との

$$\epsilon_{ij}^u = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^u}{\partial x_i} \right), \quad u_i^u = 0 \quad \text{on } S_K$$

を満足するものとする。この場合には、式 (3.149) の右辺はそのすぐ上に示した誘導過程から

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V \epsilon_{ji} C_{ijkl} \epsilon_{kl}^u dV &= \sum_i \sum_j \int_V \sigma_{ji} \epsilon_{ij}^u dV = \sum_i \sum_j \int_V \sigma_{ji} \frac{\partial u_i^u}{\partial x_j} dV \\ &= \sum_i \sum_j \int_S u_i^u n_j \sigma_{ji} dS - \sum_i \sum_j \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} u_i^u dV = \sum_i \int_S u_i^u F_i dS + \sum_i \int_V u_i^u X_i dV \end{aligned}$$

となるので、結局、 \mathbf{u}^u の幾何学的境界条件を考慮すれば

$$u_f(\xi) = \sum_i \int_S u_i^u F_i dS + \sum_i \int_V u_i^u X_i dV = \sum_i \int_{S_s} u_i^u F_i dS + \sum_i \int_V u_i^u X_i dV \quad (3.150)$$

を得る。すなわち、ある単位集中外力に対する問題の変位の解 \mathbf{u}^u が求められていれば、任意の外力が作用した場合の問題は上式 (3.150) で解くことができることを示している。この $\mathbf{u}^u(\mathbf{x}; \xi)$ は、この問題が対象としている物体の **Green** 関数であるが、構造力学の影響線と同じである。例えば第 3.6.4 (6) 節や第 3.6.5 節には単位集中外力に対する解を示した。具体的な利用法については、付録 E を読めば雰囲気はわかってもらえるかもしれない。

演習問題 3-7

7. 式 (3.123) から式 (3.127) を求めてみよ。

3.6 弾性問題の例

3.6.1 固体中を伝播する波

静的な問題はあとでやることにして、式 (3.22) の応力のつり合い式を動的な問題に対して拡張しよう。そのためには Newton の法則に従って右辺に慣性項を加えればよい。つまり、質量 m の物体の Newton の運動方程式 (2.1a) を微分体積要素 dV に対して適用すればいいので、密度を ρ とするとその Newton の法則は

$$(dV \text{ に作用している力の総和 ; 式 (3.22) の左辺})_i dV = (\rho dV) \ddot{u}_i \Rightarrow \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.151)$$

と表される。上付きドットは時間微分である。これに式 (3.46) の Hooke の法則を代入し、式 (3.6) のひずみの定義を代入すると

$$\mu \sum_j \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) + \lambda \sum_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.152a, b)$$

となる。ここで、変位場が **Helmholtz** 分解定理を用いて 2 種類のポテンシャルで与えられるとすると

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}, \quad \text{ただし } \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0, \quad \sum_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.153a, b, c, d)$$

と置くことができる。同様に分布外力も分解できるものとして

$$\mathbf{X} = \nabla F + \nabla \times \mathbf{G}, \quad \text{ただし} \quad \nabla \cdot \mathbf{G} = 0 \quad (3.154a, b)$$

と置くことができるものとする。

この2式を上運動方程式に代入して若干の演算をすると、最終的に次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (\lambda + 2\mu) \sum_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} + F - \rho \ddot{\phi} \right\} + \sum_k \sum_l \epsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu \sum_j \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial x_j^2} + G_l - \rho \ddot{\psi}_l \right\} = 0$$

これより、2種類の変位のポテンシャルが満足すべき式は二つの中括弧の中がそれぞれ零になる条件であるが、分布外力が無い場合 ($F \equiv 0, \mathbf{G} \equiv \mathbf{0}$) にはそれは

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c_L^2} \ddot{\phi}, \quad \nabla^2 \psi = \frac{1}{c_T^2} \ddot{\psi} \quad (3.155a, b)$$

となり、2種類の基本的な波動方程式を得る。ここに

$$c_L \equiv \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_T \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.156a, b)$$

は位相速度（波の伝わる速度）と呼ばれる量で、 c_L は縦波あるいは体積波・疎密波（Pressure 波；地震波なら Primary 波，P 波）の位相速度， c_T は横波あるいはせん断波（Shear 波；地震波なら Secondary 波，S 波）の位相速度である。具体的な問題と解については第10章を参照のこと。でもどうして体積波の位相速度は体積弾性係数 K を使った $\sqrt{\frac{K}{\rho}}$ にならず、第10.2.2節の平面波の縦波の速度なのだろう。膨張する波なので点源からの波と考えればいいから、波動方程式を球座標で表現すれば等と想像をめぐらすと、うーむ、もしかしたら分散するのかな、エネルギー一定では広がっていかないかな、と考えると、うーむ。でも無限遠点では球面波もほとんど平面波だしなあ。線源ならどうだろう。極座標かあ。この場合はひよっとすると、かもしれないなあ。勉強しないとわからないなあ。

3.6.2 流体力学の基礎

(1) 非圧縮性流体

そういえば流体もゆっくり動いているときはほぼ連続体なので、弾性体ではないが、もう一つの動いている連続体力学の例として流体を対象としてみよう。しかし学生時代の水理学の授業はわからなかった。例えば跳水の問題は運動量保存則で答を得るのに、跳水の間にはエネルギーが散逸されてエネルギーは保存されないとか、よくわからないことをあとで習う。運動方程式と運動量保存則およびエネルギー保存則は同じものだと思うのだが、どうして？そして使っているのは運動方程式なのか、あるいは他の保存則等なのか、よくわからないまま解き方を覚えたような印象もある。構造力学・材料力学に比べて支配方程式がたくさんあって適用範囲がそれぞれ異なっているのではないだろうかという印象である。またエネルギー散逸のある運動を対象としているのに、出てくる式は運動量保存則と等価な Bernoulli の式の左辺だったりする。できるだけ偏微分方程式を出さずに教育する方針があるのだろうか。著者のような頭の悪い人間にはとても難しい学問であるが、確かに学部2, 3年生の時点で偏微分方程式がたくさん出てくると駄目になっていたかもしれないなあ。しかし米国の3年生の弾性論の授業では微分方程式が使われる。しかも極座標で。ということで、水理学は苦手な単位を取れたかどうか覚えていないが、前節までの固体の場合と同様、運動方程式つまりつり合い式を解いてわかる問題だけに限定して、社会基盤構造の設計で必要になるかもしれない情報に限定していくつか列挙しておく。

一般に流体は弾性体ではなく粘性体でモデル化されるので、構成則にはひずみの代わりにひずみ速度を用いる。そして、ほぼ非圧縮性を持つ（体積が変わらない）連続体としてモデル化されるので、式(3.14)の体積ひずみが常に零である。したがって、変位ではなく速度で非圧縮性を定義し直すと、式(3.83b)の代わりに

$$\sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad \mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{u}} = \sum_j v_j \mathbf{e}_j \quad (3.157a, b)$$

となる。ここに \mathbf{v} は速度ベクトルであり、この非圧縮性の条件式を主に流体屋さんには連続の式と呼ぶ。以下、第3.4.3(3)節で定式化した非圧縮性材料の支配方程式の変位を速度に置き換えて運動方程式を求めてみる。上の非圧縮性の条件が成立すると、式(3.46)のHookeの法則の右辺第2項は意味が無くなるが、体積が変化しないように流体が抵抗をしており、それが材料の抵抗特性（材料定数）とは関係の無い独立な関数「水圧 $p(\mathbf{x}, t)$ （静的あるいは定常問題では静水圧）」として存在することになる。したがって、応力ひずみ関係式(3.85)のひずみをひずみ速度に置き換えて

$$\sigma_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} - p \delta_{ij}, \quad \sum_j \dot{\epsilon}_{jj} = 0 \quad (3.158a, b)$$

が流体の抵抗則である。二つ目の式(3.158b)は式(3.157a)をひずみ速度で表したものである。また、この場合の μ はひずみ速度に比例した比例抵抗係数なので粘性係数と解釈される。Hookeの法則を式(3.158)で置き換えた上で運動方程式(3.152)に代入し、分布外力が流体の自重だけなら（そうでない場合も形式的には $\mathbf{X} = \rho \mathbf{f}$ と置けるので、それは

$$\mu \sum_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho (f_i - \dot{v}_i) = 0 \quad (3.159)$$

となる。これはNavier-Stokesの式として知られている。 \dot{v}_i は加速度 \ddot{u}_i である。

ところで流体の場合の速度は固体的場合とはアプローチが異なり、流体中の物質点（水粒子）の速度ではなく観察している「場所の」速度であることの方が多い。つまり、ガラスの水槽の側面にマークを記し、その場所の現象を定点カメラで観測している。しかし、慣性項の速度の時間微分は「水粒子の」加速度でなければならず、時刻 t に \mathbf{x} にあった水粒子（その名前を $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ とすると）が時間と共に移動していくので、 $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), t)$ のように「 t の瞬間にいた位置 $\mathbf{x}(t)$ 」と t の関数と捉えないといけない。したがって「水粒子の」速度も

$$v_i \equiv \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) = \dot{x}_i(\mathbf{x}(t), t) = v_i(\mathbf{x}(t), t)$$

となる（瞬間的には「場所の」速度と同じな）ので結局、「水粒子の」加速度は物質導関数つまり偏微分の連鎖律を用いて

$$\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \quad (3.160)$$

と表現する必要がある。式(3.160)の最右辺第2項は移流項と呼ばれる。通常、固体力学が物質点（ \mathbf{x} が固体中の粒子に付けた名前）を追跡するLagrange手法をとることが多いのに対し、流体力学では空間位置（ \mathbf{x} は水粒子の名前ではなく空間のある観測位置の名前）で現象を捉えるEuler手法を用いることの方が多い。何のことかわからないかもしれないが、第12章を勉強すると少しはわかるようになるかもしれない。

したがって、移流項も含めたNavier-Stokesの式(3.159)の陽な表現は

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) = \mu \sum_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i \quad (3.161)$$

となる。ところで、社会基盤工学分野で流体を対象とする問題に思いを巡らせると、例えば河川幅や管径・橋梁部材寸法・橋脚寸法等の長さの単位を持つ量がたいの場合存在する。このような長さの単位を持つ量の

代表寸法を「代表長さ L 」と呼び、また水路等を流れる代表的な流速を「代表流速 U 」と呼ぶことにして、独立変数や速度・水圧・外力をそれで無次元化しよう。つまり

$$\xi_i \equiv \frac{x_i}{L}, \quad \tau \equiv \frac{tU}{L}, \quad V_i \equiv \frac{v_i}{U}, \quad P \equiv \frac{p}{\rho U^2}, \quad \bar{f}_i \equiv \frac{f_i L}{U^2}$$

と定義して、連続の式 (3.157a) と Navier-Stokes の式 (3.161) を無次元化すると、それぞれ

$$\sum_i \frac{\partial V_i}{\partial \xi_i} = 0, \quad \frac{\partial V_i}{\partial \tau} + \sum_j \frac{\partial V_i}{\partial \xi_j} V_j = \frac{1}{Re} \sum_j \frac{\partial^2 V_i}{\partial \xi_j^2} - \frac{\partial P}{\partial \xi_i} + \bar{f}_i \quad (3.162a, b)$$

となる。式 (3.162b) の右辺第 1 項の係数の分母にある Re は **Reynolds 数** と呼ばれる無次元パラメータで

$$Re \equiv \frac{\rho L U}{\mu} \quad (3.163)$$

と定義される。つまり、例えば粘性係数が比較的小さい場合や流速が大きい場合等には Reynolds 数が大きくなり、右辺第 1 項の影響は相対的に小さくなる。

(2) 定常状態の代表的な解

円管の中の層流: 最初に半径 a の円管の中の定常流を取り上げよう。まず第 C.4 節を参考にして極座標系で Navier-Stokes の式等を書き直し、 x_3 軸方向に無限に長い円管の中の流れを考える。外力が作用していない定常状態の軸対称問題なので

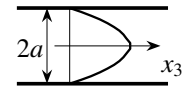


図 3.23 円管の中の流れ

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \quad v_r = v_r(r), \quad v_\theta = 0, \quad v_3 = v_3(r), \quad f_i = 0, \quad p = p(r, x_3)$$

と考えていい。この条件下で第 C.4 節に注意しながら連続の式を極座標で書くと

$$\frac{dv_r(r)}{dr} + \frac{v_r(r)}{r} = 0$$

となるので、これを積分すると

$$v_r(r) = A \frac{1}{r}$$

を得る。しかし $A \neq 0$ は湧き出しか吸い込みの解であり、ここでは考慮する必要が無いから $A = 0$ となるので、結局、非零の速度成分は v_3 のみになる。以上の結果を用いると Navier-Stokes の式 (3.161) の慣性項はすべて零になり、 θ 方向の式は無意味になる。残りの r 方向と x_3 方向の運動方程式からはそれぞれ

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_3}{dr} \right) \quad (*)$$

を得る。第 1 式から水圧 p は x_3 のみの関数になる。すると第 2 式の左辺は x_3 のみの関数になり、右辺は r のみの関数なので、両辺共に定数でなければならない。したがって

$$\frac{dp}{dx_3} = \text{const.}$$

つまり圧力勾配は一定になる。流体は管の壁面 ($r = a$) では滑らないとするのが一般的であり、また図のように x_3 軸上 ($r = 0$) で流速は最大になるので

$$v_3(a) = 0, \quad \frac{dv_3}{dr}(0) = 0$$

という境界条件の下で式 (*) の (第 2 式右辺 = const.) を積分すると、流速が

$$v_3(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx_3} (r^2 - a^2)$$

のような放物線分布をすることがわかる。これは **Hagen-Poiseuille** の流れと呼ばれている。十分大きな粘性係数を持っていて Reynolds 数の小さい層流の場合に生じる流れだと考えられている。

(3) 定常状態にある完全流体の代表的な解と関係式

回したコップの水面形状: 次に, 粘性を持たず $\mu = 0$ である完全流体を入れた円柱状のコップを回転させた場合の水面形状を求めよう。上の例と同様, 流体はコップの壁面で滑らないものとする。この例も定常状態の軸対称問題で, 一定のスピンの ω で回転させているものとするれば

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \quad v_r = v_r(r), \quad v_\theta = r\omega, \quad v_3 = 0, \quad f_1 \equiv 0, \quad f_2 \equiv 0, \quad f_3 = -g$$

と考えていい。前節同様湧き出しや吸い込みは考慮する必要が無いので, 結局, 非零の速度成分は v_θ のみになる。

この条件下で Navier-Stokes の式 (3.161) の加速度項を極座標で求めると, r 方向の (負の) 向心力への貢献分だけが非零で

$$\dot{v}_r = -\frac{1}{r} (v_\theta)^2 = -r\omega^2, \quad \dot{v}_\theta = 0, \quad \dot{v}_3 = 0 \quad (3.164a, b, c)$$

を得る。以上の結果をまとめると Navier-Stokes の式の θ 方向の式は意味が無くなり, 残りの r 方向と x_3 方向の運動方程式は

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{1}{r} (v_\theta)^2 = \rho r \omega^2, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

となる。第1式を積分すると $p(r, x_3) = \frac{1}{2} \rho r^2 \omega^2 + q(x_3)$ となり, これを第2式に代入して積分すると $q(x_3) = -\rho g x_3 + \text{const.}$ を得るので, 結局圧力分布が³

$$p(r, x_3) = \rho \left(\frac{1}{2} r^2 \omega^2 - g x_3 \right) + c$$

と求められる。水面の水圧は零であるから, 上式の左辺を零と置くことによって水面では

$$x_3 = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \frac{c}{\rho g}$$

が成立する。コップ中心 $r = 0$ の水面の高さを h_0 として積分定数を決定すれば, 最終的な水面形状が

$$x_3 = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_0$$

のような放物線形状になる。

Bernoulli の式: では, 外力がスカラーポテンシャル $F(\mathbf{x})$ で与えられた (非回転流に対応した) 場合, つまり

$$f_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

だけが作用していて, 定常状態にある完全流体の Navier-Stokes の式 (3.161) を整理すると

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{2} \rho \sum_j v_j v_j + p + \rho F \right\} = 2\rho \sum_j \dot{\omega}_{ij} v_j \quad (*)$$

となる。ただし $\dot{\omega}_{ij}$ はスピントレンソル成分を形式的に表したもので, 反対称な量

$$\dot{\omega}_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = -\dot{\omega}_{ji} \quad (3.165)$$

である。上式 (*) の括弧内第1項は速度ベクトルの大きさの2乗になっているので単に v^2 と記すことにする。

もし非回転の運動しかしていない場合には右辺の $\dot{\omega}_{ij}$ は零になり, 結局いたるところで

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho F = \text{const.} \quad (3.166)$$

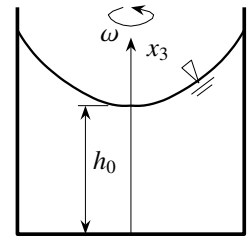


図 3.24 回転するコップの水面

が成立する。もし分布外力が重力場の自重のみであれば、重力加速度 g を用いて $F = g x_3$ と置いていいことから、上式は

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g x_3 = \text{const.} \quad (3.167)$$

となる。これは **Bernoulli** の式である。一方回転流の場合には、上式 (*) 右辺を成分とするベクトルと速度ベクトルの内積が零になる

$$\sum_i v_i \sum_j \dot{\omega}_{ij} v_j = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (v_i \dot{\omega}_{ij} v_j + v_j \dot{\omega}_{ji} v_i) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j v_i v_j (\dot{\omega}_{ij} + \dot{\omega}_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j v_i v_j (\dot{\omega}_{ij} - \dot{\omega}_{ij}) = 0$$

ことから、流線に沿った速さと座標をそれぞれ v と s とすると

$$\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} = v \frac{\partial}{\partial s} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g x_3 \right) = 0 \quad (3.168)$$

となるので、結局、その流線に沿って **Bernoulli** の式が成立する。運動方程式を 1 回積分してあるので運動量保存則に相当する。

浮力: 最後に、運動していない完全流体が重力場にある場合の静水圧分布を算定しておこう。外力は

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = -g$$

ただだとして、慣性項と粘性項の両方共無視することによって、Navier-Stokes の式 (3.161) は

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

になる。したがって、静水圧分布は **Bernoulli** の式 (3.167) と同じく $p(x_3) = -\rho g x_3 + c$ となるが、図 3.25 のように座標の原点を水面にとることによって積分定数 c を零にすることができ

$$p(x_3) = -\rho g x_3 > 0 \quad \text{for } x_3 < 0 \quad (\text{水中})$$

のような静水圧分布が得られる。このとき水中に、面積 A の平板の片方の面に作用している静水圧の総和を求めるために、その面の外向き法線単位ベクトルを \mathbf{v} とする。上の静水圧状態は応力で表すと

$$\sigma_{ij}(x_3) = -p(x_3) \delta_{ij}$$

となるので、法線方向を \mathbf{v} とする表面の単位面積当たりの表面力ベクトル f_i は、Cauchy の定理式 (3.19) から

$$f_i(x_3) = \sum_j v_j \sigma_{ji} = - \sum_j v_j p(x_3) \delta_{ji} = -p(x_3) v_i < 0 \quad \text{圧縮}$$

である・・・といったことをしなくても、面の法線内向き方向の圧力が p だからこの表現になるとわかるべきだが、上の応力成分が書けることも重要だ。したがって、 x_i 方向の総圧力 F_i (圧縮正) は

$$F_i \equiv - \int_A f_i(x_3) dA = \int_A p(x_3) v_i dA = \int_A \rho g x_3 v_i dA = \int_{A_i} \rho g x_3 dA_i, \quad A_i \equiv v_i A$$

と求められる。ここに A_i は面積 A を座標の x_j-x_k 面 (ijk は (123) の偶置換) に投影した面積である。

さて、ある物体が図 3.25 の水槽の中の左の物体のように完全に水没している場合には、上述と同様にして、この物体に作用している静水圧の総和は

$$F_i = \int_S \rho g x_3 v_i dS$$

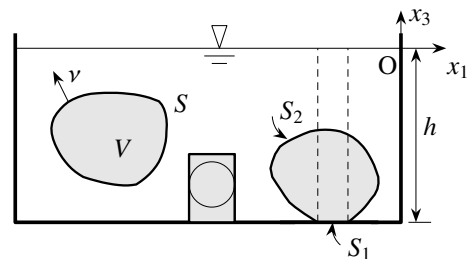


図 3.25 浮力

で算定できるが、右辺の表面積分項に Gauss の発散定理を用いると

$$F_i = \rho g \int_V \frac{\partial x_3}{\partial x_i} dV = \rho g \int_V \delta_{3i} dV = \rho g V \delta_{3i} \quad \rightarrow \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = \rho g V$$

と求められる。ここの δ_{3i} は Kronecker のデルタなので、結局 F_3 のみが非零で、物体の体積に流体の密度 ρ と重力加速度 g を乗じた力が x_3 方向に作用していることがわかる。これは取りも直さず浮力である。

ところで、ある物体が図 3.25 の水槽の中の右の物体のように、表面の一部 S_1 が深さ h にある水平な底面に密着している場合を考えよう。そこには糊は付いておらず、底と物体の間に流体が無いだけだとする。物体の全表面を S として $S_1 \cup S_2 = S \equiv \partial V$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ であるものとする。この場合に物体に作用している静水圧の総和は

$$F_i = \int_{S_2} \rho g x_3 v_i dS = \int_S \rho g x_3 v_i dS - \rho g h S_1 \delta_{3i} = \rho g (V - h S_1) \delta_{3i}$$

と求められる。 $h \times S_1$ は、図 3.25 に示した底面積が S_1 で高さ h の破線で表した柱の体積である。この結果から、もし $V < h \times S_1$ の場合にはこの物体には x_3 の正方向の力つまり浮力は働かない。例えば図 3.25 の水槽の中央にある円柱のような場合には、この円柱は浮いてこないことを意味する。どう、面白くない? いずれにしても、流体力学（水理学）も変形できる物体の力学であることがこういった例からもわかると思う。

(4) 速度ポテンシャル

ここでは 2 次元 ($v_3 \equiv 0$ の 3 次元状態：次節の平面ひずみ状態と同じ) の完全流体の定常運動を対象としよう。完全流体の場合は微分方程式で表した運動方程式は途中まで解けていて、それは式 (3.168) の Bernoulli の式である。この式と非圧縮性（連続）の式 (3.157a) を連立させれば問題が解ける。このとき後者が微分方程式であることから、それを満足する速度場を求めた上で Bernoulli の式 (3.168) によって水圧等を求めるという手法も可能である。その一つの方法として、もし速度場があるスカラー関数 $\phi(\mathbf{x})$ によって

$$v_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (3.169)$$

のように表されるとすると、非圧縮性の式 (3.157a) にこれを代入して

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0 \quad (3.170)$$

を得る。つまり、ある問題に対してその速度場を表現できるような調和関数 ϕ を見つけられれば、問題がほぼ解けたことになる。この $\phi(x_1, x_2)$ を速度ポテンシャルと呼ぶ。

一方、もし速度場が別の関数 $\psi(x_1, x_2)$ と

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (3.171a, b)$$

のような関係を満足する場合には非圧縮性の式 (3.157a) は自動的に成立する。そのとき ψ の全微分を算定して零と置いた式から

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = -v_2 dx_1 + v_1 dx_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{v_2}{v_1}$$

という関係が成立することになるので、 $\psi = \text{const.}$ で表される曲線 $x_2 = x_2(x_1)$ は流線を表していることがわかる。そのため ψ は流れ関数と呼ばれる。そこで、この二つの関数を実部と虚部に持つ複素関数 $f(z)$ を

$$f(z) \equiv \phi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2), \quad z = x_1 + i x_2$$

と定義すると、式 (3.169) と式 (3.171) から

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (3.172a, b)$$

を満足するが、この条件式は、 $f(z)$ という複素関数の実部と虚部との間の **Cauchy-Riemann** の関係式と⁵⁶呼ばれている。これが成立する場合には $f(z)$ は微分可能で1階の微係数 $f'(z)$ が存在できる [15] ことがわかっている。ここにプライムは z による微分を表す。したがって、この複素関数 $f(z)$ の微係数に式 (3.169) (3.172) を用いると

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = v_1 - i v_2$$

のようにして速度場を求めることができるので、 $f(z)$ を複素速度ポテンシャルと呼んでいる。さらに非回転の流れの場合には、式 (3.165) のスピンを零と置いて流れ関数の式 (3.171) を代入すると

$$\omega = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}\right) = -\nabla^2 \psi = 0$$

を満足するので、流れ関数 ψ も調和関数である。調和関数はたくさんあるので、その中から適切な調和関数を選んで ϕ あるいは ψ に用いて流線と流速を求めれば、それがどのような流れの解なのか確認できる。あとは、その結果を **Bernoulli** の式に代入することによって、流体による圧力等を算定することができる。このあたりの定式化等は習ったはずだが全く覚えていない。興味がある読者は例えば文献 [196] 等で準備体操をした上で、本格的な勉強をするといいかもれない。

基本的な具体例をいくつか挙げておこう。と言ってもわかるのは x_1 方向への一様流れの

$$f(z) = Uz \rightarrow v_1 = U, \quad v_2 = 0$$

くらいだ。 U がその流速である。さらに社会基盤構造分野で大事な基本的な現象は、橋脚が河川流から受ける力や橋梁が風から受ける力等である。その最も基本的な問題は、一様流 U 中に置いた半径 a の静止した円柱周りの流れである。この問題の複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + i U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \tag{3.173}$$

らしい。少なくとも $r \sin \theta$ や $\frac{\cos \theta}{r}$ 等は調和関数だ。さらに、これに **Joukowski** 変換と呼ばれる等角写像

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$$

を適用して z 複素平面から ζ 複素平面へと変換すると、その複素速度ポテンシャルは ζ 複素平面にある平板周りの流れの解⁵⁷になるらしい。あとは **Bernoulli** の式から構造に作用する揚力や抗力を求めれば、速度の2乗に比例した流体力が算定できる。ただし、風による橋梁等の振動問題の場合には構造自体も運動することから風との相互作用が生じるので、とても難しい不安定な動的問題になる、らしい。具体的にある問題が出されたときにどうやって複素速度ポテンシャルを求めるかについては経験が必要であるが、流れ関数の図化等が比較的容易になった昨今のコンピュータおよびソフトウェアの利用状況下では、昔よりは試行錯誤が少なくて済むかもしれない。次の節以降で紹介する応力関数やポテンシャルの導出でも同じような困難をかかえている。

以上は、固体の力学とほぼ同じように、非圧縮性の拘束条件下の運動方程式を解くという標準的な工学的アプローチで解くことができる流体力学の基本的な例だけをいくつか抽出してみたものであり、連続体力学を理解するための参考になればと思って付加した節である。なお勉強不足のため、この節に間違いがある可能性はかなり高いので、鵜呑みにはしないで各自勉強して欲しい。呵呵。

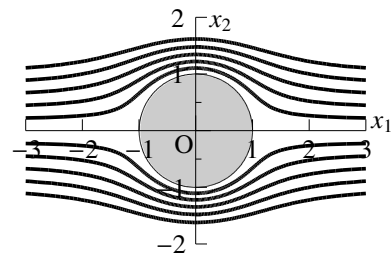


図 3.26 円柱 ($a = 1$) 周りの流線

⁵⁶ 工学部の学生にとって複素関数論は必修科目だと思うが、最近ではほとんどの学生が履修しない。第1著者は再履修でようやく単位をもらえたのだが、今後の工学研究の進展はどうなるのか少しだけ心配である。

⁵⁷ 第1著者が3年生のときだったと思うが、期末試験でこの誘導が出た。授業中にはわけがわからなかった定式化を誘導尋問のように導出させられて感動したことがある。単位が取れたかどうかは不明。

演習問題 3-8

8. 式 (3.155) を誘導せよ。
9. 式 (3.159) を誘導せよ。
10. 式 (3.167) を誘導せよ。

3.6.3 平面問題

(1) 平面ひずみ問題

これ以降は固体の静的問題に限定し、まずは3次元問題でありながら見かけ上はある平面内の問題として捉えることができる問題を対象とする。それを平面問題と総称するが、物体は3次元的に抵抗して運動するので決して2次元⁵⁸問題と呼んではいけない。まず x_3 方向への物体の拡がり方が一様でかつ他の2方向より極端に大きい物体に、やはり x_3 方向には一様な作用しか無い場合、 x_3 方向の変位は無視できるほど小さく、また応力やひずみ・変位を x_3 には依存しない関数 (x_3 方向には一定) として捉えることができる。あるいは x_3 方向にある距離で離れた2枚の摩擦の無い剛な壁に挟まれた領域に、同様の作用が存在する場合も近似的には同じになる。つまり切る前の「金太郎飴」のある断面内の現象を対象にするようなものである。このような状況を平面ひずみ状態と呼ぶ。すなわち、変位に対して

$$u_3 \equiv 0, \quad u_i = u_i(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2) \quad \rightarrow \quad \epsilon_{3j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.174a, b, c)$$

という制約がある場合に相当する。最後の式のように $\epsilon_{3j} = 0$ なので平面ひずみ状態と呼んでいる。したがって式 (3.46) に代入して

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2G & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2G \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix}, \quad \sigma_{12} = 2G \epsilon_{12}, \quad (3.175a, b)$$

$$\sigma_{33} = \lambda (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \neq 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{31} = 0 \quad (3.175c, d, e)$$

という関係を得る。これから、 x_1 - x_2 平面内の逆関係は、式 (3.48) で定義した Poisson 比を用いると

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{2G} \{\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12}, \quad \epsilon_{22} = \frac{1}{2G} \{\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\} \quad (3.176a, b, c)$$

となる。この関係を上式 (3.175c) の σ_{33} の右辺に代入することによって、応力は2次元的ではなく

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \neq 0 \quad (3.177)$$

という拘束条件が存在しているものと考えなければならない。このように σ_{33} が零でないことには十分注意する必要がある。

ちなみに式 (3.46) の Hooke の法則を、ひずみを与える式として書き直して、式 (3.48) で定義した Young 率と Poisson 比を用いると、3次元的には

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E} \{\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\} \quad (3.178)$$

とも書くことができるので、 $\epsilon_{33} = 0$ という平面ひずみ条件に代入すると式 (3.177) を求めることができる。なお、平面ひずみ場の平面内の弾性係数は同じ面内の3次元のそれに等しいが、コンプライアンスは同じにはならないことには十分注意すること。また次の平面応力状態とは異なり、上述のような剛な壁で対象を挟むような実際の実験によって、工学的に良好な精度の範囲でこの状態を実現することは可能である。

⁵⁸ 歴史書 [77] を参照すると、2367 年に Enterprise-D (TM Paramount Pictures) が遭遇するまでは未知の生命体である。

(2) 平面応力問題

逆に、鋼の平板引張試験のように、外力が作用していない自由表面同士の間隔が小さい物体つまり平板試験片の厚さが比較的薄い場合等では、その厚さ方向に x_3 軸をとると、他の2方向に比べて x_3 方向の応力がそれほど大きくはならないだろうということは容易に想像できる。したがって、その（高精度では実現できない）近似として応力状態が平面的であるような場合を平面応力状態と呼ぶ。この条件を応力成分で表すと

$$\sigma_{3i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.179)$$

となる。これを式 (3.46) に代入すれば

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \neq 0, \quad \epsilon_{23} = 0, \quad \epsilon_{31} = 0 \quad (*)$$

という面外ひずみに対する制約条件を得るので、 x_1 - x_2 面内の構成関係は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \frac{2G}{1-\nu} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix}, \quad \sigma_{12} = 2G \epsilon_{12} \quad (3.180a, b)$$

となる。この逆関係が

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2G}\sigma_{12}, \quad \epsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \quad (3.181a, b, c)$$

となる。

この関係を用いれば、上式 (*) のひずみ成分は面内応力成分と

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \neq 0, \quad \epsilon_{23} = 0, \quad \epsilon_{31} = 0 \quad (3.182a, b, c)$$

のように関係付けられる。平面ひずみの場合と同様、3次元の式 (3.178) に平面応力の拘束条件式 (3.179) を代入しても、これと同じ関係を得ることができる。この式 (3.182) あるいは上の式 (*) は面外ひずみに対する拘束条件と捉えることができ、そういう意味でも実際厳密に設定できる状態とは考え難いため、近似的な状態であると考えられている。なお、平面応力場の平面内のコンプライアンスは同じ面内の3次元のそれに等しいが、弾性係数は同じにはならないことには十分注意すること。

また x_1 方向を長手方向とする丸鋼の引張試験のように、ほぼ応力が σ_{11} のみの1軸状態になっている場合には、この式 (3.181) からさらに

$$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \quad \epsilon_{22} = -\nu\epsilon_{11}, \quad \epsilon_{12} = 0 \quad (3.183a, b, c)$$

という関係になり、試験片中央の2方向に貼付したひずみゲージの読みと外力から Young 率と Poisson 比が直接測定できる。この最後の関係式 (3.183a) をこの文書では1次元の **Hooke** の法則と呼ぶことにする。

(3) ロゼットゲージと Mohr のひずみ円

肉厚が比較的薄い試験片で曲げ試験をする場合等で、任意点のせん断応力や主応力を測定したいときには、任意の3方向のひずみをひずみゲージで測定して三つのひずみ成分を求め、それを平面応力の応力ひずみ関係式に代入することによってひずみと応力を算定できそうだ。この3方向のひずみを測定するひずみゲージにロゼットゲージがある。ロゼットゲージは図 3.27 の右側の図のような3枚のひずみゲージの組でできている。斜めのは水平

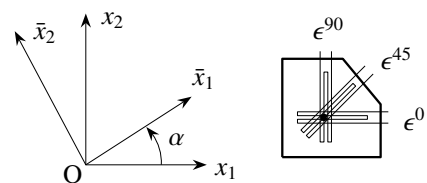


図 3.27 応力・ひずみ成分の座標変換とロゼットゲージ

軸に対して45度方向を向いている。まず図3.27の左側の図のような座標系間のひずみテンソル成分の変換則を陽に示すと、式(3.11)から

$$\begin{pmatrix} T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.184)$$

であるから、式(3.13)は

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{11} &= \epsilon_{11} \cos^2 \alpha + \epsilon_{12} \sin 2\alpha + \epsilon_{22} \sin^2 \alpha, & \bar{\epsilon}_{12} &= \epsilon_{12} \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \sin 2\alpha, \\ \bar{\epsilon}_{22} &= \epsilon_{11} \sin^2 \alpha - \epsilon_{12} \sin 2\alpha + \epsilon_{22} \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

と書くことができる。図3.27のロゼットゲージの場合の ϵ^{45} は上の $\alpha = \pi/4$ の場合の $\bar{\epsilon}_{11}$ に相当するから

$$\epsilon^{45} = \epsilon_{12} + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$$

となる。もちろん $\epsilon_{11} = \epsilon^0$, $\epsilon_{22} = \epsilon^{90}$ であるから、結局この測定点のせん断ひずみ成分を測定値から

$$\epsilon_{12} = \epsilon^{45} - \frac{1}{2}(\epsilon^0 + \epsilon^{90})$$

と得る。さらに、主ひずみ方向（主応力方向も同じ）は、上のひずみ成分間の座標変換で $\bar{\epsilon}_{12} = 0$ になる方向であることから

$$\tan 2\alpha = \frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} = \frac{2\epsilon^{45} - (\epsilon^0 + \epsilon^{90})}{\epsilon^0 - \epsilon^{90}}$$

で決まる方向 α である。また薄片であることから平面応力場で近似できるので、式(3.181)の逆関係から

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon^0 + \nu\epsilon^{90}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon^{90} + \nu\epsilon^0), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \epsilon^{45} - \frac{1}{2}(\epsilon^0 + \epsilon^{90}) \right\} \quad (3.185a, b, c)$$

と応力は求められる。主応力方向は主ひずみ方向と同じであり、主応力は式(3.30)の解に式(3.185)を代入して

$$\sigma_i = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$$

で求められる。正の符号をとったものが $i=I$ であり、負の符号の場合が $i=III$ （平面応力問題なので $\sigma_{II} = 0$ ）である。

ところで上の座標変換則は

$$\bar{\epsilon}_{11} = \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2} + \frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2} \cos 2\alpha + \epsilon_{12} \sin 2\alpha,$$

$$\bar{\epsilon}_{12} = \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2} - \frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2} \sin 2\alpha + \epsilon_{12} \cos 2\alpha,$$

$$\bar{\epsilon}_{22} = \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2} - \frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2} \cos 2\alpha - \epsilon_{12} \sin 2\alpha$$

とも書くことができる。したがって

$$r^2 \equiv \left(\frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2} \right)^2 + (\epsilon_{12})^2, \quad e \equiv \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2}$$

と定義しておく、上の関係は

$$\{\bar{\epsilon}_{11} - e\}^2 + \{\bar{\epsilon}_{12}\}^2 = r^2 \quad (3.186)$$

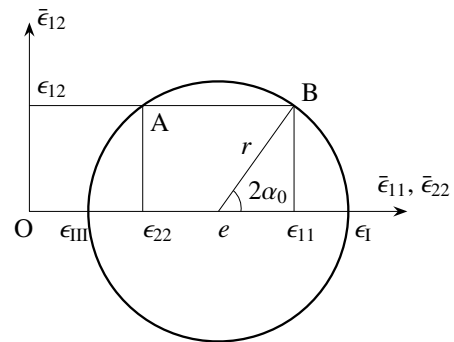


図3.28 Mohrのひずみ円

という関係を満足する。この式は、第1項の $\bar{\epsilon}_{11}$ を $\bar{\epsilon}_{22}$ で置き換えても同様に成立する。この関係を示したのが図3.28である。つまり、任意点の伸びひずみ成分とせん断ひずみ成分との関係は図示したような円上の2点AとBで指定できている。また、横軸と円との交点がそれぞれ主ひずみになっていることは、 $\bar{\epsilon}_{12} = 0$ になる方向を $\alpha = \alpha_0$ として、そのときの $\bar{\epsilon}_{11}$, $\bar{\epsilon}_{22}$ がそれぞれ主ひずみ ϵ_I , ϵ_{III} であることを上式に代入して得ることができる $\epsilon_I = e + r$, $\epsilon_{III} = e - r$ という関係からも明らかである。このような円を**Mohrのひずみ円**と呼ぶ。応力についても同様の円が描ける。

(4) 積層板の見かけ上の Young 率

第8章で紹介する平板理論では、板の面内の拡がりに比べて厚さが非常に薄いことを前提にしているため、平面応力状態の構成則が用いられる。実際鋼構造であれば肉厚が薄いため、そのような近似は許容できそうである。また、図3.29のような繊維補強材でできた複数の平板を、その繊維の向きが板毎に異なるように層状に重ねて積層板を作り、それを補強や橋梁自体に使うことがある。多くはポリマーにガラス繊維 (GFRP) や炭素繊維 (CFRP) を配合してある。この板も平面応力問題の構成則が用いられ、式(3.181)を一般化して

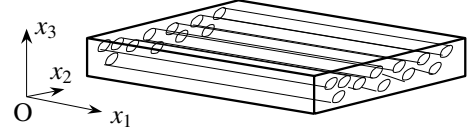


図 3.29 繊維補強材でできた平板

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2\mu_{12}} \sigma_{12} \quad (3.187a, b)$$

と表されることが多い。ここに E_1, E_2 が2方向の Young 率で、 ν_{12}, ν_{21} が Poisson 比、さらに μ_{12} が板の面内のせん断弾性係数

$$\mu_{12} = C_{66} \quad (3.188)$$

である。したがって、この板の独立な材料定数は五つ ($\nu_{12}E_1 \neq \nu_{21}E_2$ の場合) ないし四つ ($\nu_{12}E_1 = \nu_{21}E_2$ の場合) になる。あるいは逆関係なら

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \begin{pmatrix} E_1 & \nu_{12}E_1 \\ \nu_{21}E_2 & E_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix}, \quad \sigma_{12} = 2\mu_{12}\epsilon_{12}$$

と書くこともできる。

では、3次元の弾性テンソルとこの積層板の材料定数との関係を求めておこう。せん断については式(3.188)でいいので、Young 率と Poisson 比についてのみ以下で求める。まず x_3 方向の応力が零になるような平面応力状態にあるものとする、式(3.68)から

$$\sigma_{33} = 0 = C_{31}\epsilon_{11} + C_{32}\epsilon_{22} + C_{33}\epsilon_{33} \quad \rightarrow \quad \epsilon_{33} = -\frac{C_{31}}{C_{33}}\epsilon_{11} - \frac{C_{32}}{C_{33}}\epsilon_{22}$$

が成立する。これを他の二つの直応力と伸びひずみ間の関係式に代入して整理すると

$$\sigma_{11} = \left(C_{11} - \frac{C_{13}C_{31}}{C_{33}} \right) \epsilon_{11} + \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{32}}{C_{33}} \right) \epsilon_{22}, \quad \sigma_{22} = \left(C_{21} - \frac{C_{23}C_{31}}{C_{33}} \right) \epsilon_{11} + \left(C_{22} - \frac{C_{23}C_{32}}{C_{33}} \right) \epsilon_{22}$$

を得る。この逆関係を求めて式(3.187)と比較することによって

$$E_1 = \frac{D}{C_{33}(C_{22}C_{33} - C_{23}C_{32})}, \quad \nu_{12} = \frac{D}{C_{33}(C_{33}C_{12} - C_{13}C_{32})}, \quad (3.189a, b)$$

$$E_2 = \frac{D}{C_{33}(C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31})}, \quad \nu_{21} = \frac{D}{C_{33}(C_{33}C_{21} - C_{23}C_{31})}, \quad (3.189c, d)$$

$$D \equiv (C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31})(C_{22}C_{33} - C_{23}C_{32}) - (C_{33}C_{12} - C_{13}C_{32})(C_{33}C_{21} - C_{23}C_{31}) \quad (3.189e)$$

と求められる。

例えば、同じ補強繊維を x_1 方向と x_2 方向に直交させて同じ仕様で配置されている場合には、その2方向の材料特性が同じになるため

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{13} = C_{23}, \quad C_{31} = C_{32}, \quad C_{12} = C_{21}, \quad C_{44} = C_{55}$$

が成立する材料と捉えられる。このとき式(3.189)から

$$E_1 = \frac{(C_{11} - C_{12}) \{C_{33}(C_{11} + C_{12}) - 2C_{13}C_{31}\}}{C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31}} = E_2, \quad \nu_{12} = \frac{C_{33}C_{12} - C_{13}C_{31}}{C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31}} = \nu_{21}$$

となり、弾性テンソルは対称になる。なお当然であるが、平面応力場の面内のコンプライアンスは、3次元のそれ、つまり式(3.77)~(3.79)と一致する。

最後に図3.29のように、1種類の繊維が x_1 方向を長手方向にして並んでいる繊維補強板の場合には、材料は3次元的には x_2 方向と x_3 方向が同じ材料特性を持ち、 x_1 軸を対称軸とする横等方性材料として捉えることができる。したがって、式(3.70)の添え字(1, 2, 3)を(2, 3, 1)に遇置換すればいいので、3次元の材料定数は

$$C_{11}, \quad C_{22} = C_{33}, \quad C_{12} = C_{13}, \quad C_{21} = C_{31}, \quad C_{23} = C_{32}, \quad C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}), \quad C_{55} = C_{66}$$

のうち六つ($C_{12} \neq C_{21}$ の場合)ないし五つ($C_{12} = C_{21}$ の場合)が独立な定数になる。この場合には式(3.189)から

$$E_1 = \frac{\bar{D}}{C_{22} + C_{23}}, \quad E_2 = \frac{\bar{D}(C_{22} - C_{23})}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}, \quad \frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{C_{12}}{\bar{D}}, \quad \frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{C_{21}}{\bar{D}}, \quad (3.190a, b, c, d)$$

$$\nu_{12} = \frac{C_{12}(C_{22} - C_{23})}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}, \quad \nu_{21} = \frac{C_{21}}{C_{22} + C_{23}}, \quad \bar{D} \equiv C_{11}(C_{22} + C_{23}) - 2C_{12}C_{21} \quad (3.190e, f, g)$$

となる。図に示したような繊維の微視構造上、一般には $C_{12} \neq C_{21}$ と考えるのが素直であるが、このような繊維補強板では(とても不思議なことにエネルギー密度関数が存在して)、弾性テンソルは対称 $C_{12} = C_{21}$ および

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$$

になる。多くの文献では対称性($C_{12} = C_{21}$)を最初から仮定している⁵⁹ので注意すること。なお当然であるが、平面応力場の面内のコンプライアンスは、3次元のそれ、つまり式(3.73)~(3.75)と一致する。

演習問題 3-9

11. 平面ひずみ問題の応力ひずみ関係式(3.176)を誘導せよ。
12. ひずみを応力で表す関係式(3.178)を誘導せよ。
13. 平面応力問題と平面ひずみ問題の応力ひずみ関係を、ひずみで応力を与える式(平面応力の場合は式(3.185)相当)に変換せよ。
14. Mohrのひずみ円における主ひずみの関係式を証明せよ。

3.6.4 Airyの応力関数で平面問題を解く

(1) 応力で表した適合条件

前節では平面問題を定義しただけなので、ここではその解析的解法の一つを紹介し、社会基盤構造に関する代表的で重要な解をいくつか列挙しておく。なお以下はすべて、Northwestern大学のDundurs先生の‘Elasticity’の講義ノート(1980年頃)から引用・複写した。解析的な解が重要であることはこの文書の随所に書いてあるが、前節で誘導した二つの平面問題は応力関数を導入することによって解析的に解くことができる場合がある。いずれの問題も形式的には x_1 - x_2 面内の問題として閉じており、その結果を用いて x_3 方向の非零な成分の算定が付带的にできる。二つの平面状態の応力ひずみ関係は次のようにも表すことができる。

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{2G} \left\{ \sigma_{11} - \frac{3-\kappa}{4} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right\}, \quad \epsilon_{22} = \frac{1}{2G} \left\{ \sigma_{22} - \frac{3-\kappa}{4} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right\}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12} \quad (3.191a, b, c)$$

⁵⁹ その理由はたいていは「相反定理により」とあるが、それは間違い。正しくは、式(3.65b)のようなエネルギー密度関数が存在する材料だけで対称性が成立するのである。相反定理は対称性からの帰結である。第3.5.3節を参照のこと。

ただし

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & (\text{平面ひずみ状態}) \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & (\text{平面応力状態}) \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{cases} \quad (3.192)$$

と定義されている。

この関係を面内ひずみ成分間のひずみの適合条件式 (3.17) に代入して、つり合い式を考慮すると

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{4}{\kappa + 1} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) \quad (3.193)$$

を得る。これを「応力で表したひずみの適合条件式」と呼ぶ。さらに、分布外力が何らかのポテンシャル関数 $V(x_1, x_2)$ を用いて

$$X_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad X_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2}$$

と置ける場合には、上式 (3.193) は

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{4}{\kappa + 1} \nabla^2 V \quad (3.194)$$

となる。

(2) Airy の応力関数

さて、もしある関数 $U(x_1, x_2)$ によって

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + V, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + V \quad (3.195a, b, c)$$

のように応力を表すことができたとする、これは実は応力のつり合い式 (3.21) を自動的に満足する。したがって、解きたい物理問題に対して U を求めることができれば応力がわかり、式 (3.191) からひずみが求められる。さらに U がひずみの適合条件式 (3.194) を満足するようになっていれば式 (3.6) のひずみ変位関係は積分でき、任意点の変位も算定でき、対象としている問題が正しく解けた⁶⁰ことになる。したがって、 U を用いて最終的に唯一の解が求められるためには、式 (3.195) で表される応力がひずみの適合条件式 (3.194) を満足している必要がある。代入して整理すると、 U と V が満たすべき式として

$$\nabla^4 U = -\frac{2(\kappa - 1)}{\kappa + 1} \nabla^2 V \quad (3.196)$$

を得る。すなわち、この式 (3.196) を満足するような関数 U を求める (探し出す) ことができれば、固体の平面問題は解けたことになる。この関数 U を **Airy の応力関数** と呼び、分布外力が無い場合には、上式 (3.196) は

$$\nabla^4 U = 0 \quad (3.197)$$

となる。つまり応力関数の斉次解は重調和関数である。重調和関数は非常にたくさん存在し、最も簡単なものは多項式である。この応力関数 U を探し出すことによって問題を解く手法は、第 3.6.2 (4) 節の速度ポテンシャルを用いた流体問題の解法とほぼ同じアプローチである。ただし以下の例を読めばわかるように、それぞれの応力関数がどのようにして選ばれてのかについてはあまり学習できないので、解析解が必要な場合には別途例えば機械工学系の文献等を参照して欲しい。

⁶⁰ 境界条件を正確に満足するような解 (応力関数) を探し出すことは一般にはとても難しい。

(3) 代表的な例

まず、直角座標系の多項式で応力関数が表現できるような例として両端単純支持板を文献 [96] から引用しておこう。この解を知っておくと、梁理論の仮定と精度を理解し易くなるからだ。代入すれば明らかなように

$$U = A \left(\frac{x_2^5}{30} - \frac{x_1^2 x_2^3}{6} \right) + \frac{B}{2} x_1^2 - \frac{C}{2} x_1^2 x_2 - \frac{D}{6} x_2^3$$

は式 (3.197) の解の候補である。これと $V = 0$ を式 (3.195) に代入すると任意点の応力を算定できる。もちろん他の多項式も解の候補ではあるが、ここに挙げたのは図 3.30 の単純支持された板 ($|x_1| < \ell$, $|x_2| < c$, $|x_3| < \infty$) の応力を与える可能性がある項だけを抽出したものである。この問題の境界条件は

$$\sigma_{22}(x_2 = c) = q, \quad \sigma_{12}(x_2 = \pm c) = 0, \quad \sigma_{22}(x_2 = -c) = 0$$

および、本当は $x_1 = \pm \ell$ で $\sigma_{11} = 0$ としたいところだが、それを満足する応力関数を探し出すのが困難なので、少し緩めて

$$\int_{-c}^c \sigma_{11}(x_1 = \pm \ell) dx_2 = 0, \quad \int_{-c}^c x_2 \sigma_{11}(x_1 = \pm \ell) dx_2 = 0 \quad (3.198a, b)$$

のように断面力としての軸力と曲げモーメントが作用していないものにしておこう。

以上の境界条件に上の U を代入することによって、各係数を

$$A = -\frac{3q}{4c^3}, \quad B = -\frac{q}{2}, \quad C = \frac{3q}{4c}, \quad D = \frac{3q}{20c} \left\{ 5 \left(\frac{\ell}{c} \right)^2 - 2 \right\}$$

と決定できるので、対応する応力分布が

$$\sigma_{11} = \frac{3qx_2}{4c^3} (x_1^2 - \ell^2) - \frac{qx_2}{10c^3} (5x_2^2 - 3c^2), \quad (3.199a)$$

$$\sigma_{12} = \frac{3qx_1}{4c^3} (c^2 - x_2^2), \quad (3.199b)$$

$$\sigma_{22} = \frac{q}{4c^3} (x_2 + c) (x_2^2 - cx_2 - 2c^2) \quad (3.199c)$$

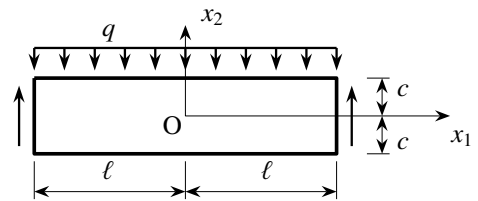


図 3.30 両端単純支持された板

と求められる。応力成分 σ_{11} の第 1 項は次章で定式化する初等梁理論の解であり、第 2 項は第 1 項に比べると c/ℓ の 2 乗に比例して小さくなる。すなわち細長い梁であれば第 2 項は無視できるほど小さくなる。もう一つの直応力 σ_{22} の大きさも同様に、 σ_{11} と比較したとき c/ℓ の 2 乗に比例して小さくなることを示すことができる。またせん断応力 σ_{12} は放物線分布しており、これも次章で定式化する理論で求められるものに等しい。

ただし式 (3.198) で示したように、両端部 $x_1 = \pm \ell$ の境界条件は梁の条件としては厳密なものではなく、平均的なものとしてしか与えられていない。そのため、結果的には図 3.31 の右側にあるような応力 σ_{11} が左右端に生じている。また分布外力を $x_2 = c$ の面に直接載せたので、 σ_{22} がその面で零ではなく q になっていることも梁理論とは異なる。しかし、少なくとも構造力学としての境界条件として軸力と曲げモーメントが零になる条件を式 (3.198) は満足している。

この結果で重要なことは、梁が細長くなって c/ℓ が十分小さくなると梁理論の結果にほぼ一致することである。さらに **Saint-Venant** の原理によって、端部からの距離が離れば離れるほど端部の比較的小さい乱れ成分の影響が小さくなることもわかっている。その乱れの減衰と梁中央部の応力分布は、3次元有限要素解を用いて定量的に図 4.75 にも示した。また式 (3.199) の結果は第 5.6 節の図 5.40 に平面ひずみ有限要素解と比較して

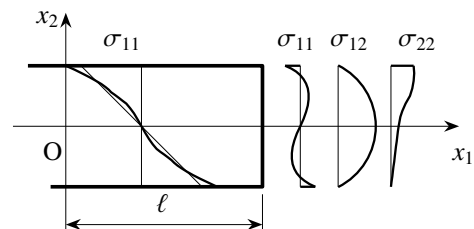


図 3.31 両端単純支持された板の応力分布

示した。最終的に上の応力分布を式(3.191)に代入し、それを式(3.6)に代入して積分すれば、適切な境界条件の下で変位成分を決定できる。応力関数 U が適合条件を満足するように求められているので、この積分は唯一の変位成分を決定する。変位の結果については文献 [96] を参照のこと。

演習問題 3-10

15. 式(3.193)を誘導せよ。
16. 式(3.196)を誘導せよ。
17. 式(3.199)を誘導し、変位成分 u_i ($i = 1, 2$) を求めよ。

(4) 極座標系の Airy の応力関数

Airy の応力関数: 軸対称問題はもちろん、集中外力が作用した場合や亀裂先端のように特異性を持つ問題の場合には、極座標を用いた方が便利なが多い。その場合も、Airy の応力関数 $U(r, \theta)$ と分布外力のポテンシャル関数 $V(r, \theta)$ が満たすべき関係は式(3.196)と同じである。ただし

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (3.200)$$

であり、応力は応力関数 U および分布外力のポテンシャル関数 V を用いて

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + V, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + V \quad (3.201a, b, c)$$

のように関係付けられる。ここに r と θ 方向の外力成分は

$$X_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad X_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (3.202a, b)$$

と定義した。応力ひずみ関係は、式(3.191)の応力 ($\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$) を ($\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}$) で置き換え、ひずみも同様の置換をするだけである。またひずみ変位関係は

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \quad (3.203a, b, c)$$

となる。ここに u_r と u_θ は r および θ 方向の変位成分である。

前節の直角座標の例では構造力学的な境界条件を厳密には満足させられない点に注目してもらった。その例のように、応力関数を用いた解法では変位を応力関数 U で陽には表すことができないため、例えば Dundurs 先生の講義では、主要な応力関数から得られる応力や変位のリストが準備されていた。特に極座標における表は秀逸である。多分先生の著作のどこかにすべて書いてあると思われるので、いくつかの例だけを表 3.1 に引用した。つまり、このような表をデータベースとして頭の中に入れておいて、解きたい問題の境界条件や応力状態、さらに変位の境界条件等を表と見比べて適切な応力関数を選択するという手法にならざるを得ない場合が多いのだ。したがって応力関数を用いて問題を解くためにはかなりの経験が必要になる。

さて、外力の無い軸対称問題の場合は θ に関する微係数もすべて無くなり、応力関数 $U(r)$ は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right\} \right] = 0 \quad (3.204)$$

を満足する関数になるので、これを積分すれば明らかなように、解は

$$U = \mathcal{L} \{1, r^2, \ln r, r^2 \ln r\} \quad (3.205)$$

のように四つの関数の線形和 $\mathcal{L}(\dots)$ になる。それぞれ表 3.1 から

表 3.1 極座標系の代表的応力関数: 剛体変位成分は $u_r = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta$, $u_\theta = -c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta + c_3 r$

| U | σ_{rr} | $\sigma_{r\theta}$ | $\sigma_{\theta\theta}$ | $2G u_r$ | $2G u_\theta$ |
|-----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|---|---|
| r^2 | 2 | 0 | 2 | $(\kappa - 1)r$ | 0 |
| $\ln r$ | $1/r^2$ | 0 | $-1/r^2$ | $-1/r$ | 0 |
| $r^2 \theta$ | 2θ | -1 | 2θ | $(\kappa - 1)r\theta$ | $-(\kappa + 1)r \ln r$ |
| $r\theta \sin \theta$ | $2 \cos \theta / r$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2} [(\kappa - 1)\theta \sin \theta + (\kappa + 1) \ln r \cos \theta - \cos \theta]$ | $\frac{1}{2} [(\kappa - 1)\theta \cos \theta - (\kappa + 1) \ln r \sin \theta - \sin \theta]$ |
| $r \ln r \cos \theta$ | $\cos \theta / r$ | $\sin \theta / r$ | $\cos \theta / r$ | $\frac{1}{2} [(\kappa + 1)\theta \sin \theta + (\kappa - 1) \ln r \cos \theta - \cos \theta]$ | $\frac{1}{2} [(\kappa + 1)\theta \cos \theta - (\kappa - 1) \ln r \sin \theta - \sin \theta]$ |
| $r^2 \cos 2\theta$ | $-2 \cos 2\theta$ | $2 \sin 2\theta$ | $2 \cos 2\theta$ | $-2r \cos 2\theta$ | $2r \sin 2\theta$ |
| $r^2 \sin 2\theta$ | $-2 \sin 2\theta$ | $-2 \cos 2\theta$ | $2 \sin 2\theta$ | $-2r \sin 2\theta$ | $-2r \cos 2\theta$ |
| $\cos 2\theta / r^2$ | $-6 \cos 2\theta / r^4$ | $-6 \sin 2\theta / r^4$ | $6 \cos 2\theta / r^4$ | $2 \cos 2\theta / r^3$ | $2 \sin 2\theta / r^3$ |
| $\cos 2\theta$ | $-4 \cos 2\theta / r^2$ | $-2 \sin 2\theta / r^2$ | 0 | $(\kappa + 1) \cos 2\theta / r$ | $-(\kappa - 1) \sin 2\theta / r$ |

$U = 1 \Rightarrow$ 無応力なので無視。

$U = r^2 \Rightarrow$ 等方な一様応力だが, 無限遠で変位は発散する。ただし気にしなくていい。

$U = \ln r \Rightarrow$ 原点で応力と変位が特異になるものの, 無限遠では零になる。

$U = r^2 \ln r \Rightarrow$ 原点と無限遠で応力が特異である。変位は原点では零だが, 無限遠では発散する。

さらに u_θ は 2 値関数になるため, 不連続になったり物体が重なる状況に対応する。

といった性質を持つことから, どのような問題に適した応力関数かが少しではあるが想像できる。

軸対称な代表例: まず代表例として図 3.32 に示した問題を応力関数式 (3.205) を用いて解いてみよう。ひょっとしたら, 山岳トンネルの状況はこの図のような問題からある程度推測できるかもしれない。まずこの図の左側に示した円(柱)孔のある輪の問題に対する応力関数は

$$U = -\frac{pb^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{1}{2} r^2 - a^2 \ln r \right) \quad (3.206)$$

で与えられる。すると周方向応力 $\sigma_{\theta\theta}$ は表 3.1 から

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = -\frac{pb^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (3.207)$$

と求められる。そこでこの孔周辺 $r = a$ の周方向応力を求めると

$$\sigma_{\theta\theta}(a, \theta) = -\frac{2pb^2}{b^2 - a^2} \quad (3.208)$$

となる。この結果を使って図 3.32 の右側の図のような無限体を考えるために, $b \rightarrow \infty$ の極限をとるとその応力は

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sigma_{\theta\theta}(a, \theta) = -2p \quad (3.209)$$

のように, 応力集中係数が 2 になることがわかる。しかもそれが孔の半径に依存しないので, トンネル断面の大小にかかわらず応力集中係数は同じである。んー本当かな? また例えば $b = 3a$, $1.5a$ の場合の応力集中係数は

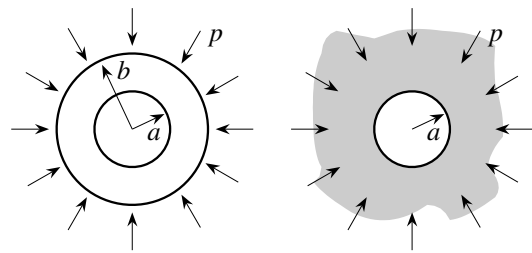
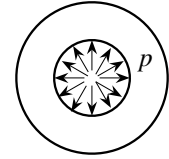


図 3.32 等方圧下の円(柱)孔周りの応力

式(3.208)からそれぞれ2.25, 3.6となるので, 土被りが小さいトンネルが危険なことを, この応力集中係数の違いが示しているのだろうか(?)。

では逆に, 孔の側に圧力 p が作用している図 3.33 の場合の応力関数は

$$U = \frac{p a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{1}{2} r^2 - b^2 \ln r \right) \quad (3.210)$$



となるので, 周方向応力は

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{p a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right), \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \sigma_{\theta\theta}(a, \theta) = p \quad (3.211a, b) \quad \text{図 3.33 内圧の場合}$$

となり, 無限体の場合は応力集中係数は1である。トンネルが開いた場合には, それまで作用していた地山の圧縮の圧力 p が零になると考えてもいいだろうから, 上の結果の正負を入れ替えたのが答だと解釈できるかもしれない。もしそうだとすると, 孔周辺の周方向応力は圧縮の $-p$ である。一方上述のように, 孔が開いた状態に地山の圧縮圧力 p が (均等なわけではないが) 作用していると考えると, 式(3.209)からは周方向応力が $-2p$ になって, 倍の違いがある。さて, 実際のトンネルではどんな応力状態になっているのだろうか。

(5) 非弾性ひずみと Airy の応力関数

非弾性ひずみがある場合の平面問題: ここでは熱膨張等による熱ひずみのような非弾性ひずみが存在する問題を, Airy の応力関数を用いて解く例を示しておく。非弾性ひずみが存在する場合のひずみ変位関係と Hooke の法則は式(3.105)で与えられていた。これに対する平面ひずみ状態および平面応力状態の面内の応力ひずみ関係は

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{2G} \left\{ \sigma_{11} - \frac{3-\kappa}{4} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right\} + \epsilon_{11}^* + \eta \epsilon_{33}^*, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12} + \epsilon_{12}^*, \quad (3.212a, b)$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{2G} \left\{ \sigma_{22} - \frac{3-\kappa}{4} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right\} + \epsilon_{22}^* + \eta \epsilon_{33}^* \quad (3.212c)$$

のように表される。ここに, ϵ_{ij}^* が非弾性ひずみの成分であり

$$\eta = \begin{cases} \nu & \text{(平面ひずみ状態)} \\ 0 & \text{(平面応力状態)} \end{cases} \quad (3.213)$$

と定義した。これを用いて, Airy の応力関数 U が満足すべき式(3.196)に相当する条件式を求めると

$$\nabla^4 U = -\frac{2(\kappa-1)}{\kappa+1} \nabla^2 V - \zeta \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{22}^*}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}^*}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}^*}{\partial x_2^2} + \eta \nabla^2 \epsilon_{33}^* \right) \quad (3.214)$$

となる。ここに

$$\zeta = \frac{8\mu}{\kappa+1} = \begin{cases} \frac{2\mu}{1-\nu} = \frac{E}{1-\nu^2} & \text{(平面ひずみ状態)} \\ 2\mu(1+\nu) = E & \text{(平面応力状態)} \end{cases} \quad (3.215)$$

と定義した。したがって一般的には, 与えられた V と ϵ^* に対して境界条件も考慮した上で, この式(3.214)を満足する Airy の応力関数 U を求めればよいことになる。

ただし, 非弾性ひずみが一様に分布する場合には上式(3.214)の右辺第2項は無視してもいいことになり, 前節までの定式化で求めた Airy の応力関数の解がそのまま使えることになる。実際, 解析的な解を求めることができる範囲の問題の多くでは, Eshelby [25] による著名な成果で示されたように, 楕円体形状の領域内の非弾性ひずみは一様分布すると捉えていいし, あるいはそのように近似できるので, 上式(3.214)の右辺第2項は無視できる場合も多い。

熱膨張による変形と応力: では第3.4.4節で説明に用いた熱膨張問題を具体的に解いてみよう。ただし平面問題を対象とし、図3.34の上段に示したように、無限体中にある半径 a の円柱領域（以下「円」領域と略す）だけが ΔT の温度上昇を受けた場合の、この無限体内の応力を求める。図の中段に描いたように、この円部分はまず ΔT の温度変化を受けていることから、この領域の非弾性ひずみが

$$\epsilon_{11}^* = e^* \equiv \alpha \Delta T, \quad \epsilon_{22}^* = e^*, \quad \epsilon_{33}^* = e^*, \quad \text{他の成分} = 0 \quad (3.216a, b, c, d)$$

で与えられる。ここに α は線膨張係数である。したがって、式(3.212)のひずみ変位関係を念頭に置くと、この円の半径方向の伸びひずみ e_r^c と半径の膨張分 Δa_r^c は

$$e_r^c = \epsilon_{11}^* + \eta \epsilon_{33}^* = (1 + \eta) e^*, \quad \Delta a_r^c = e_r^c a = (1 + \eta) e^* a \quad (3.217a, b)$$

となる。

次にこの膨張した円を元の物体に戻すために、図3.34の中段右図のように圧力 p を作用させて半径を縮め、同時に下段の図のように孔にも同じ圧力 p を作用させて拵げよう。等方圧力 p による円の半径の縮み分を $\Delta a_p^c < 0$ とし、孔の半径の拡大分を Δa_p とすると、この円が元に戻るためには

$$\Delta a_r^c + \Delta a_p^c = \Delta a_p \quad (3.218)$$

であればいいことがわかる。これは式(3.103)と同じ条件である。

いずれにしても非弾性ひずみが一樣なので、前節までの応力関数が見える。まず円に p を作用させた問題は、図3.32の問題で $a \rightarrow 0, b \rightarrow a$ とすればいいので、応力関数と周方向の変位は式(3.206)と表3.1から

$$U = -\frac{1}{2} p r^2, \quad 2\mu u_\theta = -\frac{1}{2} p (\kappa - 1) r$$

と求められる。したがって、この円の半径の縮み分は $u_\theta(a, \theta)$ に等しいので

$$\Delta a_p^c = -\frac{(\kappa - 1)}{4\mu} p a \quad (3.219)$$

と求められる。一方孔に p を作用させた問題も図3.33の問題で $b \rightarrow \infty$ とすればいいので、応力関数と周方向の変位は式(3.210)と表3.1から

$$U = -p a^2 \ln r, \quad 2\mu u_\theta = p a^2 \frac{1}{r}$$

と求められる。したがって、この孔の半径の伸び分も $u_\theta(a, \theta)$ に等しいので

$$\Delta a_p = \frac{p a}{2\mu} \quad (3.220)$$

と求められる。以上の式(3.217b)(3.219)(3.220)を式(3.218)に代入することによって、元の孔に円が納まるための適合条件が

$$(1 + \eta) e^* a - \frac{(\kappa - 1)}{4\mu} p a = \frac{p a}{2\mu}$$

となる。つまり、式(3.95)と式(3.96)の \bar{K} と \bar{K}^s の具体的な表現は、この平面問題では

$$\bar{K} = 2\mu, \quad \bar{K}^s = -\frac{4\mu}{\kappa - 1} < 0 \quad (3.221a, b)$$

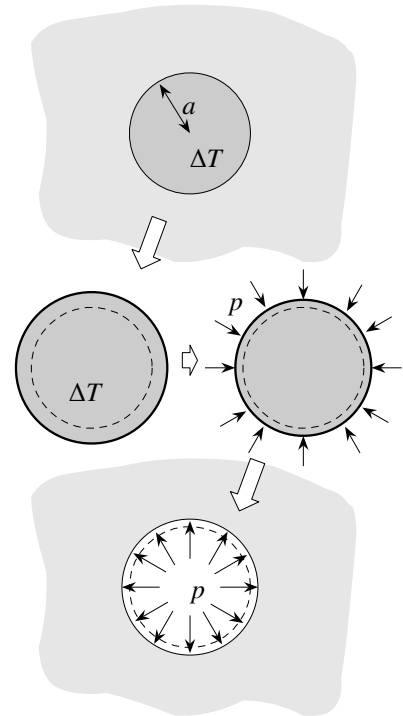


図 3.34 円柱領域の熱膨張

だったことになる。したがって、円が隙間無く元に戻るのに必要な圧力 p が

$$p = \frac{4\mu(1+\eta)}{\kappa+1} e^* = \frac{4\mu(1+\eta)}{\kappa+1} \alpha \Delta T \quad (3.222)$$

と求められる。この結果をそれぞれの応力関数に代入し直せば、表 3.1 から応力分布が

$$\begin{aligned} \text{外側 } (r > a) \text{ では } \sigma_{rr} &= -\frac{a^2}{r^2} p = -\frac{a^2}{r^2} \frac{4\mu(1+\eta)}{\kappa+1} \alpha \Delta T, & \sigma_{\theta\theta} &= -\sigma_{rr}, \\ \text{内側 } (r < a) \text{ では } \sigma_{rr} &= -p = -\frac{4\mu(1+\eta)}{\kappa+1} \alpha \Delta T, & \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} \end{aligned}$$

と求められる。後者は一様応力になっていて、Eshelby の解が示す一様性を表している。

演習問題 3-11

18. 式 (3.212) を誘導せよ。
19. 式 (3.214) を誘導せよ。

(6) 極座標系の Airy の応力関数の適用例

半無限領域への載荷: 前節の問題には円の半径等の特徴的な長さがあったが、それが無い無限体の問題を考えてみよう。それは、任意の問題の基本解あるいは Green 関数としても使える可能性があるからだ (今はわからなくていいが、興味がある読者は式 (3.150) 前後を参照)。そこで図 3.35 のように、 $x_2 > 0$ 側の表面 ($x_1 = 0, |x_3| < \infty$) に一様な分布表面外力 q が作用している問題を対象としよう。注意しなければならないのは、この問題も平面問題なので分布外力は x_3 方向にも一様に分布しているということである。したがって q の次元は [力][長さ]⁻² である。そこで次元解析を利用してみよう。まず、長さの次元を持っているのは r のみなので、求めたい無次元の応力関数は $\frac{U}{qr^2}$ と考えてよさそうだ。この関数が複数の無次元の独立変数の関数になるとした場合、考えられる無次元変数は θ くらいだろうから、例えば

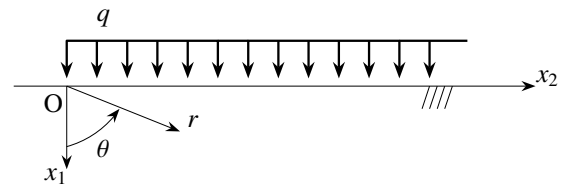


図 3.35 半無限の一様載荷

$$U = qr^2 F(\theta)$$

と仮定してみよう。物体中には分布外力は無いので、この関数 U は重調和関数でなければならず、したがって関数 $F(\theta)$ は

$$\nabla^4 U = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} + 4 \right) F(\theta) = 0$$

を満足しなければならない。これより一般解は

$$F(\theta) = \mathcal{L}(1, \theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta)$$

という線形和で与えられる。このとき

$$U = r^2 \Rightarrow \text{一様な応力状態を表す。}$$

$$U = r^2 \theta \Rightarrow -\pi/2 < \theta < \pi/2 \text{ の半無限領域なので特に問題は無い。}$$

$$U = r^2 \sin 2\theta, r^2 \cos 2\theta \Rightarrow \text{これも直角座標系の一様な応力状態を表す。}$$

となることから、すべてを候補と考えることができるので

$$U = q(Ar^2 + Br^2\theta + Cr^2\cos 2\theta + Dr^2\sin 2\theta) \quad (*)$$

と置き、 $x_1 = 0$ の表面の境界条件

$$\sigma_{r\theta}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = -q, \quad \sigma_{r\theta}\left(r, -\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}\left(r, -\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

に代入する。このとき第1式と第3式は同じ条件式になるので、結局、残りの三つの式から得られる

$$-B + 2D = 0, \quad 2A + \pi/4B - 2C = -1, \quad 2A - \pi/4B - 2C = 0 \quad (**)$$

を解くことによって、上の応力関数は

$$U = q\left\{A(r^2 + r^2\cos 2\theta) - \frac{1}{2\pi}r^2\theta + \frac{1}{4}r^2\cos 2\theta - \frac{1}{4\pi}r^2\sin 2\theta\right\}$$

となる。しかし、係数Aが付いた項は $\sigma_{11} = \text{const.}$ の応力に対応しているだけなので、この問題では無視していい。したがって最終的に、この問題の応力関数が

$$U(r, \theta) = q\left(-\frac{1}{2\pi}r^2\theta + \frac{1}{4}r^2\cos 2\theta - \frac{1}{4\pi}r^2\sin 2\theta\right) \quad (3.223)$$

と求められる。

これを用いて算定できる応力等は表3.1から

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= q\left(-\frac{1}{\pi}\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2\pi}\sin 2\theta\right), & \sigma_{r\theta} &= q\left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{2\pi}\cos 2\theta\right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= q\left(-\frac{1}{\pi}\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2\pi}\sin 2\theta\right) \end{aligned}$$

のように特異性は無い。また変位にも特異性は無く

$$u_r = \frac{qr}{4\mu}\left(-\frac{1}{\pi}(\kappa - 1)\theta - \cos 2\theta + \frac{1}{\pi}\sin 2\theta\right), \quad u_\theta = \frac{qr}{4\mu}\left(\frac{1}{\pi}(\kappa + 1)\ln r + \sin 2\theta + \frac{1}{\pi}\cos 2\theta\right)$$

と求められる。ちなみに、分布外力が x_2 方向のせん断力である場合には、 $x_1 = 0$ の表面の境界条件が

$$\sigma_{r\theta}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = q, \quad \sigma_{\theta\theta}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sigma_{r\theta}\left(r, -\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}\left(r, -\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

となるが、これに上式(*)の応力関数の候補を代入して得られる式(**)に相当する連立方程式は、その第1式と第3式とが互いに矛盾することから、係数A, B, C, Dを求める連立方程式の解は不能となる。つまりこのせん断力の問題では次元解析の手法が使えないことになる。うーむ、これは何か重大なことらしいが。

半無限領域の分布外力の有限幅载荷: 次に、図3.36のように有限の幅 c の部分だけに等分布外力 q が作用している場合を考えよう。この場合は図3.37(a)のような座標を定義して、上で得た解を図3.37(b)のように幅 c だけずらして重ね合わせればよいから、式(3.223)の応力関数を用いて

$$U = U(r_1, \theta_1) - U(r_2, \theta_2)$$

がその応力関数になる。しかし、式(3.223)をこの式に代入して整理すると、それぞれの第2, 3項同士の差は結局 x_1 と x_2 の1次項と定数になるので、式(3.201)に代入しても応力を生み出さない。したがってそれに関する項は意味がなくなり、この問題の応力関数は二つの応力関数の第1項同士の差だけで

$$U(r, \theta) = \frac{q}{2\pi}\left(-r_1^2\theta_1 + r_2^2\theta_2\right) \quad (3.224)$$

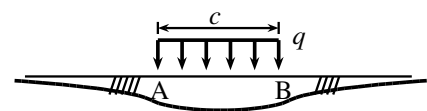


図 3.36 有限幅の等分布载荷と変位

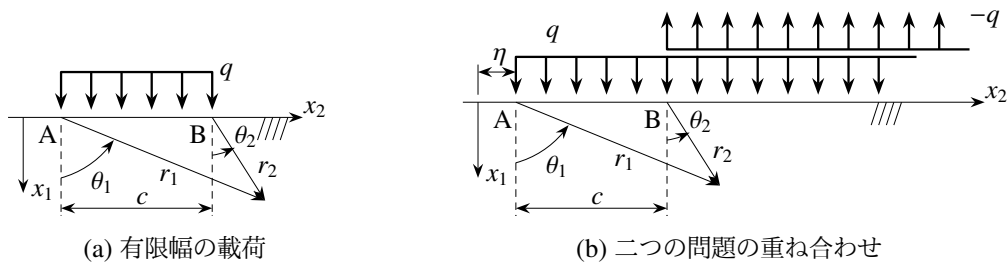


図 3.37 半無限領域表面への有限幅の荷重

と求められる。例えば表面の応力は表 3.1 から

$$\sigma_{11} = \frac{q}{\pi} (\theta_2 - \theta_1)$$

となるので、表面の力の境界条件を正しく満足していることが確かめられる。その他の応力や変位は各自求めてみて欲しい。

半無限領域の集中荷重: この分布外力の特別な場合として、図 3.38 に示したように、 $x_1 > 0$ 側の半無限領域の原点 ($x_1 = 0, x_2 = 0, |x_3| < \infty$) に x_1 方向の集中線外力 P (以下「線」を略す) が作用した問題を考えよう。ただし、平面問題なので集中外力 P は x_3 方向には一様な線外力であることに注意するように。この場合はまず、図 3.37 (b) の点 A が $x_2 = \eta$ の位置にあり、分布長さ c が非常に小さい微分長さ $c = \Delta\eta$ であると考え、 「ある条件下」で $\Delta\eta$ を零にした極限が解きたい問題に一致する。つまり、点 A から右への分布外力 q に関する応力関数を $U(r_1, \theta_1; \eta)$ と記すことにすると、点 B から右への分布外力の応力関数は $U(r_2, \theta_2; \eta + \Delta\eta)$ と記すことができるので、前節の重ね合わせた解は

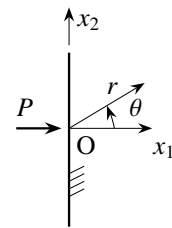


図 3.38 Flamant の解

$$U = U(r_1, \theta_1; \eta) - U(r_2, \theta_2; \eta + \Delta\eta) = \frac{q}{2\pi} \{f(r_1, \theta_1; \eta) - f(r_1, \theta_1; \eta + \Delta\eta)\}, \quad f(r_1, \theta_1; \eta) \equiv -r_1^2 \theta_1$$

と表してもいいことになる。 $\Delta\eta$ が微分長さなので、座標 r_2, θ_2 は r_1, θ_1 に置き換えてある。上述の「ある条件」というのは、ここで考える集中外力 P を

$$P \equiv \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} q \Delta\eta,$$

のような極限で定義することである。 $\Delta\eta$ は零になるものの、 q を乗じた項が有界で P になると考えるのであるが、これは集中外力を数学的に取り扱うときの常套手段であり、直感的には q が無限大になるものの積 $q \Delta\eta$ が有界になると考えればいい。これを上式に代入すると

$$U = \frac{P}{2\pi} \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \frac{f(r_1, \theta_1; \eta) - f(r_1, \theta_1; \eta + \Delta\eta)}{\Delta\eta} = -\frac{P}{2\pi} \frac{df(r_1, \theta_1; \eta)}{d\eta}$$

と表すことができる。そこで

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1, \quad x_2 - \eta = r_1 \sin \theta_1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial r_1}{\partial \eta} = -\sin \theta_1, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} = -\frac{\cos \theta_1}{r_1}$$

という関係になるので、上式の微係数は

$$\frac{df(r_1, \theta_1; \eta)}{d\eta} = 2r_1 \theta_1 \sin \theta_1 + x_1$$

と求められる。しかし、この第2項の x_1 は応力には寄与しないので無視すると、最終的な応力関数は

$$U_F(r_1, \theta_1; \eta, P) = -\frac{P}{2\pi} 2r_1 \theta_1 \sin \theta_1 = -\frac{P}{\pi} r_1 \theta_1 \sin \theta_1 \quad (3.225)$$

となる。もし図 3.38 のように原点に外力が作用している場合 ($\eta = 0$) には

$$U = -\frac{P}{\pi} r \theta \sin \theta \quad (3.226)$$

が、この集中外力 P に対する応力関数である。これは **Flamant** の解として知られている。あるいは平面問題における **Boussinesq** 問題の解である。このとき生じる応力は表 3.1 から

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0$$

のように、原点で特異になる。これを有限要素法等で数値的に求める方法は専門家にご相談ください。変位にも $\ln r$ があるんだが、さて? **Green** 関数とはそういうものか。

以上、外力が幅 c 内で一様な q の場合の押し込み問題を解き、さらにその極限として集中外力 P に対する解を得た。しかし逆に、ここで得た **Flamant** の解において $P = 1$ として、その q 倍を例えば $x_2 = \eta$ から $\eta + c$ ままで並べて重ね合わせた解 (概念的に)

$$U \sim \int_{\eta}^{\eta+c} q U_F(r, \theta; x_2, 1) dx_2 = q \int_{\eta}^{\eta+c} U_F(r, \theta; x_2, 1) dx_2$$

は、当然であるが (確かめてはいないが) 前節で求めた応力関数式 (3.224) にならなければならない。つまり式 (3.225) は **Green** 関数である。あるいは構造力学で用いる影響線である。つまり、ある単位の刺激 $P = 1$ が $x_2 = \eta$ に作用したときの解を **Green** 関数と呼び、その重ね合わせでほとんどの一般的な載荷状態の解を求めることができるようになる。このことから、単位外力に対する解が非常に重要であることがわかり、無限体の解を基本解と呼び、ある境界条件を満足する解を **Green** 関数と呼んでいる。

では、例えば橋脚の支持地盤に生じる応力を検討する場合には脚が外力として作用するのではなく、図 3.39 のように押し込む部分の変位が一定になる。この場合も、ここで求めた **Flamant** の応力関数を使って、分布外力の大きさ q の方を x_2 の関数 $q(x_2)$ として捉えて、上式のような重ね合わせ (概念的に)

$$U \sim \int_{-a}^a q(x_2) U_F(r, \theta; x_2, 1) dx_2$$

によって得られる表面の変位 u_θ が $-a < x_2 < a$ で一定になるように、被積分関数の中にある分布外力の未知関数 $q(x_2)$ を求めるという手法で解けることになる。最終的に解くべき式は積分方程式になるが、結果だけを文献から引用すると

$$q(x_2) = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x_2^2}}$$

を得る。この分布外力は式から明らかなように $x_2 = \pm a$ で特異である。これとよく似た問題として、転位と亀裂の問題を第 3.6.4 (7) 節で紹介し、積分方程式の解き方を具体的に示す。

Hertz 問題: 次に、図 3.40 の左側の図のように、円領域を左右から集中外力 P で圧縮した問題を解いてみよう。これはちょうどローラーベアリングや橋梁の金属支承部の局所的な応力を検討するときに必要なであろうし、コンクリートの引張試験⁶¹がこの解を直接利用している。また平面問題の **Hertz** の解とも呼ばれる。ここでも P は x_3 方向に一様な線外力である。この問題を図 3.40 の右側の図のように三つに分解しよう。一つは左側の

⁶¹ あれを **Brazilian test** と呼ぶことをご存知だろうか。

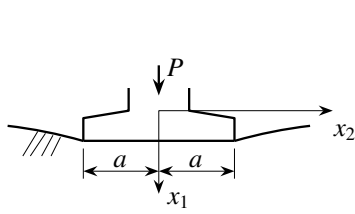


図 3.39 剛体による押し込み問題

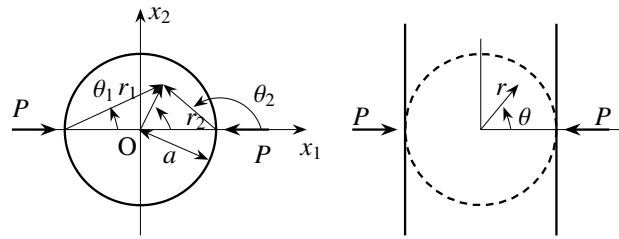


図 3.40 Flamant の解と円領域の Hertz 問題

外力についての Flamant の解であり、もう一つも同様の右側の外力に対する解である。つまり式 (3.226) を用いて、座標と外力の向きを考慮すると、それぞれ

$$U_1 = -\frac{P}{\pi} r_1 \theta_1 \sin \theta_1, \quad U_2 = \frac{P}{\pi} r_2 \theta_2 \sin \theta_2$$

という応力関数で解けるはずだ。しかし、この二つの応力関数からは、図に破線で示した円上の応力は零にはならず、元の問題の自由表面がまだ実現されていない。

そこで三つ目の応力関数 U_3 を、この破線円上の応力を零にするように選ぶことにする。上式からこの破線部の応力を求めると、そこは

$$\sigma_{rr} = -\frac{P}{\pi a}, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{P}{\pi a}$$

のような、等方応力状態にあることがわかる。したがって、表 3.1 から等方応力状態を生じさせる応力関数

$$U_3 = A r^2$$

を選択すればいいことがわかる。これを用いて破線円上を自由表面にする条件から A を求めれば、最終的な応力関数が

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{P}{\pi} \left(-r_1 \theta_1 \sin \theta_1 + r_2 \theta_2 \sin \theta_2 + \frac{1}{2a} r^2 \right) \quad (3.227)$$

と求められる。

したがって、Hertz 問題の応力状態は表 3.1 の応力を直角座標に変換して

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{2P}{\pi} \left\{ -\frac{(x_1 + a)^3}{r_1^4} + \frac{(x_1 - a)^3}{r_2^4} + \frac{1}{2a} \right\}, \\ \sigma_{12} &= \frac{2P}{\pi} x_2 \left\{ -\frac{(x_1 + a)^2}{r_1^4} + \frac{(x_1 - a)^2}{r_2^4} \right\}, \\ \sigma_{22} &= \frac{2P}{\pi} \left\{ -\frac{(x_1 + a)x_2^2}{r_1^4} + \frac{(x_1 - a)x_2^2}{r_2^4} + \frac{1}{2a} \right\} \end{aligned}$$

となる。図 3.41 の右向きの横軸が $x_1 = 0$ の断面に生じた圧縮応力 $\sigma_{11}(0, y)$ であり、中央で最も大きな値を持つ。そしてこの応力の積分値が、左側に作用している外力 P とつり合っている。一方、同じ図の左側の半円の中のインセットに示したのが、 $x_2 = 0$ の面に生じた引張応力 $\sigma_{22}(x, 0)$ であり、それは $\frac{P}{\pi a}$ の等分布になっている。したがって、コンクリートの割裂試験で割れる予定の断面に等分布応力が生じていると想像できることから、材料試験としてはとても的確なものだと判断できる。た

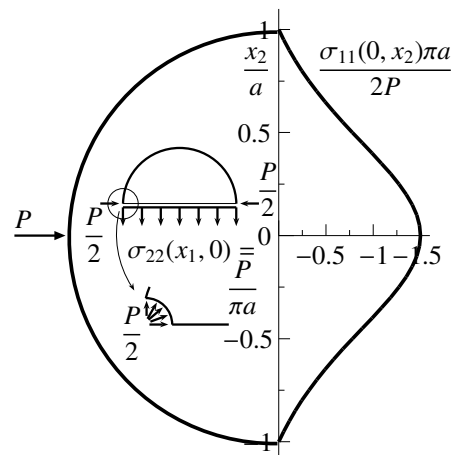


図 3.41 Hertz 問題の応力分布



写真 3.4 コンクリートの割裂試験

だし写真3.4 (図3.41を90度回転した状態)のように, 当たり前だが破断面は滑らかにはならない。ところで, この図3.41の左側のインセットを眺めると, 上半分の半円の左右方向の力は左右端の $P/2$ 同士でつり合っている。しかし上下方向の力はつり合っていないじゃないか。とんでもない解が得られているとは思えないだろうか。そこで, Flamantの解から得られる応力分布が σ_{rr} のみであったことを思い出そう。つまり, 数学的にはこの集中外力は, この図の左下に描いたように载荷点近傍ではそこから r 方向への分布外力として取り扱われているのである。したがって, この r 方向の外力の上方向成分の積分値と, $x_2 = 0$ の断面に発生した応力の積分値とがつり合うのである。特異性を持つ問題の数学はとても面白い。

円孔のある無限体: さらに図3.42のような問題は, 橋梁鋼桁の接合で使うボルト接合のボルト孔周辺の応力等を検討するときの参考になるだろう。これはKirsch (1898)によって応力集中効果が発見された問題である。まず x_1 方向に一樣な応力場に対するAiryの応力関数 U_1 が

$$U_1 = \frac{1}{2} T x_2^2 = \frac{1}{2} T r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{4} T (r^2 - r^2 \cos 2\theta)$$

であることは容易に求めることができる。しかし, これは円孔表面の自由境界条件を満足しない。そこで, 孔の存在によってその孔周辺だけが乱される場に対応した応力関数の候補 U_2 を探すと

$$U_2 \sim r^2, \ln r, \theta, r^2 \ln r, r^2 \cos 2\theta, r^4 \cos 2\theta, \frac{\cos 2\theta}{r^2}, \underline{\cos 2\theta}$$

が挙げられるが, a) θ は $\sigma_{r\theta}$ が一樣になるし, b) $r^2 \ln r$ は2値の変位を持つ場になるので, どちらも候補から除外される。さらに, c) r^2 と $r^2 \cos 2\theta$ と $r^4 \cos 2\theta$ は無限遠点で応力が乱れるのでこれも候補から除外される。したがって, U_2 で最終的に残った下線を付した候補と U_1 を採用して, 円孔表面の自由境界条件を満足するように各項の係数を求めると, 最終的な応力関数が

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{4} T \left(\overbrace{r^2 - r^2 \cos 2\theta}^{\text{一樣な引張場}} - \underbrace{2a^2 \ln r - a^4 \frac{\cos 2\theta}{r^2} + 2a^2 \cos 2\theta}_{r^{-2} \text{で減衰する乱された場}} \right) \quad (3.228)$$

のように求められる。これを用いると, 表3.1等からその応力状態は

$$\sigma_{rr} = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left\{ 1 + \left(1 - 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right\}, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{-T}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left\{ 1 + 3 \frac{a^2}{r^2} \right\} \sin 2\theta,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{T}{2} \left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\}$$

となる。そこで, 孔表面 $r = a$ における値を求めると

$$\sigma_{rr}(r = a) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r = a) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}(r = a) = T(1 - 2 \cos 2\theta)$$

と求められるので, 円孔表面の $\theta = \frac{\pi}{2}$ の位置で

$$\sigma_{\theta\theta}(r = a, \theta = \pi/2) = 3T \quad (3.229)$$

となり, 3倍の応力集中が発生することがわかる。つまり応力集中係数が3になる。しかもそれが孔の半径には依存しない。ちょっと面白いのは, $\theta = 0$ における x_1 方向の直応力 σ_{rr} は

$$\sigma_{rr} = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(2 - 3 \frac{a^2}{r^2} \right)$$

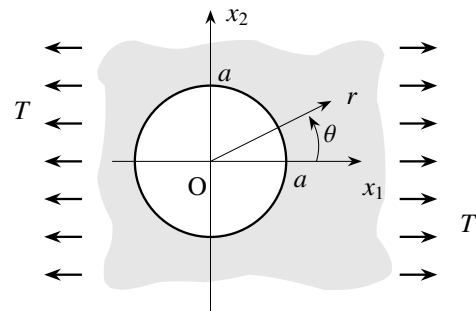


図3.42 円孔周りの応力分布

となることから、孔のすぐそばの $a < r < \sqrt{3/2}a$ の区間では圧縮が生じることがわかる。無限遠では引張られているが、孔が縦方向に縮もうとすることで応力の流れがこの辺りで滞るのであろう。

(7) 転位と亀裂 — 積分方程式

最後に、集中外力が作用した場合の解を Green 関数として用いた重ね合わせ手法の例の一つを取り上げよう。 $r^2 \ln r$ や表 3.1 の $r \ln r \cos \theta$ は、 θ 方向の変位成分 u_θ が 2 値関数になっている。つまり、物体が重なるか孔が空いている状況に相当する。この後者を

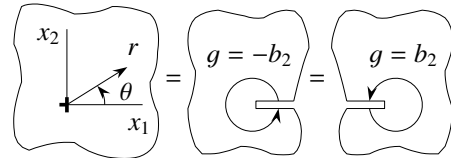


図 3.43 1 個の数学的転位

$$U = \frac{2\mu b_2}{\pi(\kappa + 1)} r \ln r \cos \theta$$

という応力関数からは、表 3.1 の応力を直角座標に変換して

$$\sigma_{11} = \frac{2\mu b_2}{\pi(\kappa + 1)} \left\{ -\frac{x_1}{r^2} + \frac{2x_1^3}{r^4} \right\}, \quad \sigma_{22} = \frac{2\mu b_2}{\pi(\kappa + 1)} \left\{ \frac{3x_1}{r^2} - \frac{2x_1^3}{r^4} \right\}, \quad \sigma_{12} = \frac{2\mu b_2}{\pi(\kappa + 1)} \left\{ -\frac{x_2}{r^2} + \frac{2x_1^2 x_2}{r^4} \right\}$$

という応力分布が求められる。上述のように、対応する変位 u_θ は表 3.1 から

$$u_\theta(r, \theta = 0) = 0, \quad u_\theta(r, \theta = 2\pi) = b_2, \quad \text{あるいは} \quad u_\theta(r, \theta = \pi) = -b_2/2, \quad u_\theta(r, \theta = -\pi) = b_2/2$$

となり、図 3.43 に示したように b_2 の大きさのギャップ g が生じている。これは図 J.10 に示した転位の図を反時計回りに 90 度回転させた状況を表していることから、上式の応力関数は $r = 0$ に 1 個の数学的転位が存在する場の解を与える。したがって $\{b\} \equiv [0 \ b_2 \ 0]^T$ は転位のずれ、つまり結晶格子 1 面分の厚さを表しており Burgers ベクトルと呼ばれている。 $x_1 > 0$ の区間ではギャップは x_2 の負方向（ギャップではなく重なり）であることから $g = -b_2$ のように負にしてある。上式の応力のうち、 σ_{12} と σ_{22} の $x_2 = 0$ における値を求めると

$$\sigma_{12}(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{22}(x_1, 0) = \frac{2\mu b_2}{\pi(\kappa + 1)} \frac{1}{x_1}$$

となる。

そこで、この転位を x_1 軸上に適切に並べることによって亀裂をモデル化してみよう。つまり、図 3.44 のように（図では正のギャップの向きと合わせるために転位の記号を上とは逆向きにしてある）例えば 4 個の転位を 2 個ずつ逆向きに 1 列に並べると、ギャップは x_1 を左から右に

$$g = - \sum_{\text{左から右へ}} b_2 \quad (*)$$

と計算していけばいいので、左右端の転位の位置ではギャップは閉じる。これで、この長さの亀裂をモデル化できたことになるだろう。そこで、長さが $2L$ の亀裂が 1 個だけ存在する、無限に大きい領域を一樣な応力 T で引張った場合の問題を、転位を $|x_1| \leq L$ に適切に並べることによって解いてみよう。ちなみに、 x_1 軸上の任意の点 $x = \xi$ に転位が 1 個ある場合の、この軸上の応力 σ_{22} は、上式の原点を移動すればいいから

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = \frac{2\mu b_2}{\pi(\kappa + 1)} \frac{1}{x_1 - \xi}$$

である。

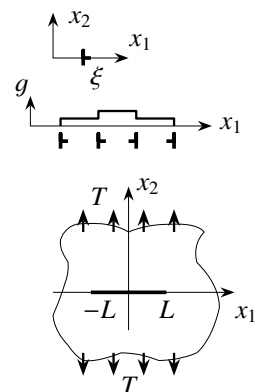


図 3.44 並んだ転位

ここで $|\xi| \leq L$ に並べる転位の個数分布 (転位密度) を $B_2(\xi)$ とすると, 上式の b_2 を関数 $B_2(\xi)$ で置き換えて重ね合わせればよいから, x_1 軸上の応力 $N(x_1) \equiv \sigma_{22}(x_1, 0)$ は

$$N(x_1) = T - \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \int_{-L}^L \frac{B_2(\xi)}{\xi - x_1} d\xi, \quad T > 0$$

となることは理解できるだろうか。また $-L \leq \xi \leq x_1$ の間のギャップは上の式 (*) を拡張して

$$g(x_1) = - \int_{-L}^{x_1} B_2(\xi) d\xi$$

となる。したがって, この $|x_1| \leq L$ の部分が亀裂である条件は, そこが自由表面で σ_{12} も σ_{22} も零になり, ギャップは両端で閉じていることだ。つまり $N(|x_1| < L) = 0$ と $g(L) = 0$ がその条件になる。したがって上2式からこの条件が

$$\int_{-L}^L \frac{B_2(\xi)}{\xi - x_1} d\xi = \frac{T\pi(\kappa + 1)}{2\mu} \quad (|x_1| \leq L), \quad \int_{-L}^L B_2(\xi) d\xi = 0$$

であればいいことになる。最初の式は, $\frac{1}{\xi - x_1}$ という特異な核を持つ第1種の Cauchy の特異積分方程式と呼ばれ⁶²。つまり, 未知関数 $B_2(\xi)$ が被積分関数の中であってその積分が右辺の与えられた関数になるように, 未知関数 $B_2(\xi)$ を求めなければならないわけだ。そしてさらに二番目の式はその未知関数に対する制約条件である。どうですか, 読者のほとんどがこういった積分方程式を解いたことは無いのではないだろうか。ちなみにこれは Northwestern 大学の3年生 (2-quarter 科目の2学期目には3年生はいなかったかも) と修士学生を対象とした講義内容である。さて, その積分方程式の解き方については次のような公式がある。

第1種の Cauchy の特異積分方程式に関する公式: 次の積分方程式

$$\int_{-1}^1 \frac{\phi(\xi)}{\xi - s} d\xi = f(s), \quad |s| < 1$$

の解は

$$\phi(s) = -\frac{1}{\pi^2} w(s) \int_{-1}^1 \frac{f(\xi)}{w(\xi)(\xi - s)} d\xi + C w(s)$$

となる。ここに $w(s)$ は特性関数で C は定数である。 $|s| = 1$ で有界な解が存在するためには, 次の適合条件

$$\int_{-1}^1 \frac{f(\xi)}{w(\xi)} d\xi = 0$$

が成立しなければならない。そして特性関数は

| | |
|--------------------|---|
| 有界な解の場合 | $w(s) = \sqrt{1 - s^2}, \quad C = 0,$ |
| $s = -1$ で特異な解の場合 | $w(s) = \sqrt{\frac{1-s}{1+s}}, \quad C = 0,$ |
| $s = 1$ で特異な解の場合 | $w(s) = \sqrt{\frac{1+s}{1-s}}, \quad C = 0,$ |
| $ s = 1$ で特異な解の場合 | $w(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}$ |

⁶² 代数方程式や微分方程式というのは, 大学工学部で教育を受けるとほぼ全員が接する方程式であり, その解法も学ぶことになっている。そして積分もできないと種々の工学的問題は解けない。しかし, 被積分関数の中に未知関数があってそれを決定するような問題 (現実社会には数えきれないくらいたくさんあるのに) には, 滅多に遭遇しないというのが昨今の工学部の教育現場の状況である。著者も学部では接したことが無かった。米国ではそれが工学部の3年次で教えられているというのは, なかなか面白いことである。なぜなら, 大学1年生の学力 (知識) レベルは多分日本人の方が上だからである。また米国大学で卒業するために必要な単位数は我が国のそれよりもかなり少ない。日本の大学教育の内容やその質はこのままで大丈夫なのだろうか。大学院では Wiener-Hopf technique も教えてもらえ (ても, さっぱり理解できないので) あるが, 日本ではもはやどの機械工学系学科・専攻でも教えてないだろう。米国大学では研究大学であっても教育をかなり重視しているように感じる。と, 自分のことは棚に上げてメモしておきたい。

となる。Dundurs 先生が講義で配付した資料 ‘Navigator’s Guide of the High Seas; Cauchy singular integral equations’ から抜粋。☞

この公式を踏まえて、答（ただし無次元化して $L = 1$ と記した場合）を示すと $|x_1| \leq 1$ で

$$B_2(x_1) = -\frac{T(\kappa+1)}{2\pi\mu} \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} \int_{-1}^1 \frac{1-\xi^2}{(\xi-x_1)\sqrt{1-\xi^2}} d\xi$$

となるので、最終的に $|x_1| \leq L$ の区間で

$$B_2(x_1) = \frac{T(\kappa+1)}{2\mu} \frac{x_1}{\sqrt{L^2-x_1^2}}, \quad g(x_1) = \frac{T(\kappa+1)}{2\mu} \sqrt{L^2-x_1^2}$$

と求められる。つまり、転位分布は亀裂両端で無限大の値を持ち、亀裂は開くと楕円形になることを示している。このときの x_1 軸上の応力を求めると、こちらは $|x_1| \geq L$ で

$$N(x_1) = T \frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2-L^2}}, \quad \lim_{x_1 \rightarrow \infty} N(x_1) = T$$

となる。亀裂から遠く離れる ($x_1 \rightarrow \infty$) と一様な外力 T に等しくなる。一方、この応力の亀裂先端 ($x_1 \rightarrow L+r$; $0 < r \ll 1$) 付近における値を求めると

$$\lim_{r \rightarrow 0} N(x_1) = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}, \quad r \equiv x_1 - L, \quad K_I \equiv T \sqrt{\pi L} \tag{3.230a, b, c}$$

となり、亀裂先端からの距離の平方根の特異性を持っていることがわかる。ここに K_I は破壊モード I の応力拡大係数と呼ばれるもので、破壊力学の基本的なパラメータである。最も基本的な破壊規準は、この応力拡大係数が破壊靱性⁶³と呼ばれる基準値 K_{Ic} に達したときに亀裂が進展するとしている。読者のほとんどが、積分方程式というものには初めて接したと思うが、例えば臓器の超音波探査や構造部材の非破壊試験等は、実は積分方程式を解いている（付録 E 参照）のである。

演習問題 3-12

20. 式 (3.228) を誘導せよ。

3.6.5 3次元問題とポテンシャル

(1) Papkovitch-Neuber のポテンシャル

3次元問題の厳密解に触れる機会は非常に少ないのではないだろうか。主に亀裂問題に接している人達分野では普通の対象なのだろうが、実際には3次元問題を対象としているにもかかわらず、その勉強を学部ではほとんどしていないのが土木分野の教育の現状かもしれない。また、文献 [96] の3次元問題の部分には間違いがあると聞いたこともある。そこでここでも Dundurs 先生の講義ノートから引用・複写しておく。

変位で表した Hooke 弾性体の3次元のつり合い式 (3.152) は、分布外力が無い場合には Lamé 定数と Poisson 比の関係を用いて

$$\sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{1-2\nu} \sum_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = 0 \tag{3.231}$$

⁶³ 「靱性」の「靱」の字体には「鞣」というのもあり、いくつかの国語辞典では「強靱」には後者が使われているが、ある漢字字典によると「靱」が正字で「鞣」と同字、「鞣」は俗字と分類されているので、この文書では前者を用いている。

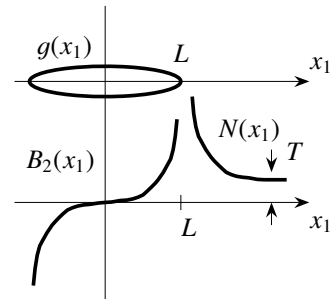


図 3.45 開口変位と転位・応力分布

と書くことができる。このとき Papkovich (1932) と Neuber (1934) は、変位が2種類のポテンシャル \mathbf{B} と β で

$$2\mu u_i = 4(1-\nu) B_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k x_k B_k + \beta \right) \tag{3.232}$$

と表されれば、上式を自動的に満足することを示した。ここに、それぞれのポテンシャルは

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0, \quad \sum_j \frac{\partial^2 B_j}{\partial x_j^2} = 0, \quad \nabla^2 \beta = 0, \quad \sum_j \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_j^2} = 0 \tag{3.233a, b, c, d}$$

を満足する調和関数である。与えられた問題に対してこのポテンシャルが求められれば、変位とひずみおよび応力は

$$2\mu u_i = (3-4\nu) B_i - \sum_k x_k \frac{\partial B_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \beta}{\partial x_i}, \tag{3.234a}$$

$$2\mu \epsilon_{ij} = (1-2\nu) \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} + \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right) - \sum_k x_k \frac{\partial^2 B_k}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{3.234b}$$

$$\sigma_{ij} = (1-2\nu) \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} + \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right) + 2\nu \delta_{ij} \sum_k \frac{\partial B_k}{\partial x_k} - \sum_k x_k \frac{\partial^2 B_k}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \partial x_j} \tag{3.234c}$$

と表される。

Helmholtz 分解定理で定義されるポテンシャルに似て、一つがベクトルポテンシャルでもう一つがスカラーポテンシャルであるが、どちらも調和関数であることから、問題に適したポテンシャルを見つけることは(経験さえあれば)少しだけ楽になるかもしれない。例えば低次の多項式の1や x_i , $(x_i x_j)$ ($i \neq j$), $R^2 - 3x_i^2$ ($R^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$) 等は調和関数である。また R^{-1} が調和関数であることも容易に証明できる。そのとき、この微係数と積分したものがどちらも調和関数⁶⁴となり、図 3.46 [89] のような性質を持つ。このようなデータベースを持っておけば、ポテンシャルの解をうまく見出せるかもしれない。ただし、ポテンシャルが座標の原点の選択に依存してしまうということが難点らしい。どうだろうか。

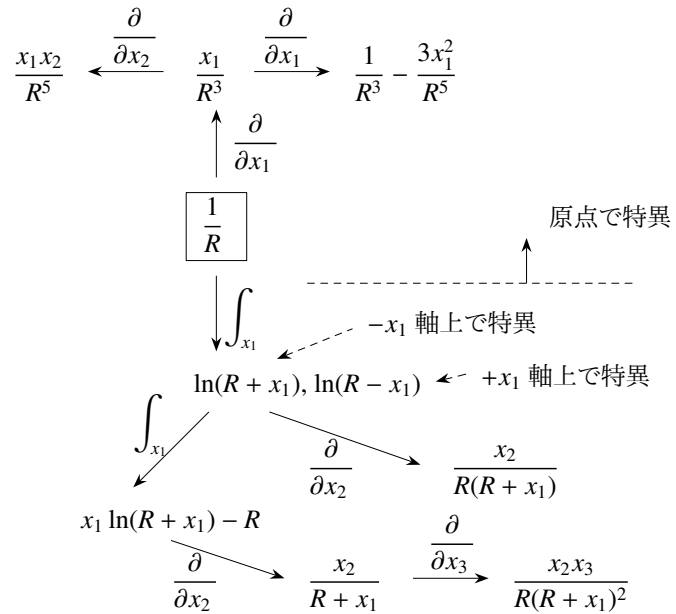


図 3.46 $1/R$ から派生する調和関数

(2) 無限体の基本的な問題の例

まず、無限領域に一樣な1軸外力が作用している図 3.47 (a) の場合のポテンシャルは

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{\sigma_0}{2(1+\nu)} x_3, \quad \beta = \frac{\sigma_0 \nu}{2(1+\nu)} (R^2 - 3x_3^2) \tag{3.235a, b, c, d}$$

⁶⁴ 重調和関数や調和関数については 'Michell's general solution' で検索すると多くのことが学べるかもしれない。

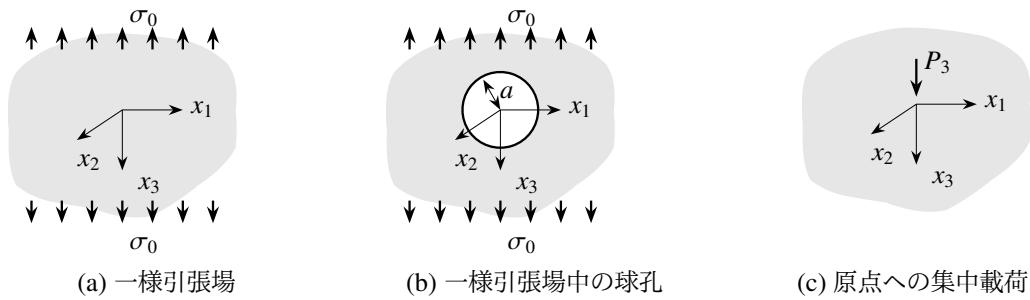


図 3.47 無限領域の無限遠点あるいは原点への载荷

である。そこに球状の孔が開いた図 3.47 (b) の場合のポテンシャル (Southwell, 1926) は

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{\sigma_0}{2} \left\{ \frac{1}{(1+\nu)} x_3 + \frac{5a^3}{7-5\nu} \frac{x_3}{R^3} \right\}, \quad (3.236a, b, c)$$

$$\beta = \frac{\sigma_0}{2} \left[\frac{\nu}{1+\nu} (R^2 - 3x_3^2) - \frac{a^3}{7-5\nu} \left\{ \frac{6-5\nu}{R} - a^2 \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3x_3^2}{R^5} \right) \right\} \right] \quad (3.236d)$$

となる。第 1 項は上述の一樣場に対応したポテンシャルであり、第 2 項が球によって乱された場であり、原点では特異だが、幸い原点は球孔の中なので問題は無い。乱された場の応力と変位はそれぞれ R^{-3} か R^{-2} で減衰する。このポテンシャルを式 (3.234c) に代入して、 σ_{33} の孔表面の応力集中係数を求めると

$$\frac{\sigma_{33}(a, 0, 0)}{\sigma_0} = \frac{27 - 15\nu}{2(7 - 5\nu)} \quad (3.237)$$

となる。この大きさはほぼ 2 であり、例えば $\nu = 1/3$ の場合には 2.0625 で、平面問題の円孔の式 (3.229) の 3 よりはかなり小さいことがわかる。しかし、溶接部のブローホール等のように鋭角部や亀裂が無い場合であっても、2 倍程度の応力集中が発生することには留意しなければならないことを示している。

次に、基本的な問題の解、つまり基本解あるいは Green 関数を示しておこう。最も基本的な解は原点への集中载荷である。この解は Kelvin の解 (1848) と呼ばれ、ポテンシャルは

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{P_3}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R}, \quad \beta = 0 \quad (3.238a, b, c, d)$$

で与えられている。

(3) 半無限体の基本的な問題の例

最後に $x_3 = 0$ に表面がある半無限体の基本的な解を列挙しておく。まず図 3.48 (a) の解は Boussinesq の解 (1885) と呼ばれていて、ポテンシャルは

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{P_3}{2\pi} \frac{1}{R}, \quad \beta = \frac{P_3(1-2\nu)}{2\pi} \ln(R+x_3) \quad (3.239a, b, c, d)$$

である。次の、図 3.48 (b) の解は Cerruti の解 (1882) と呼ばれていて、ポテンシャルは

$$B_1 = \frac{P_1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{R}, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{P_1(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_1}{R(R+x_3)}, \quad \beta = -\frac{P_1(1-2\nu)^2}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_1}{R+x_3} \quad (3.240a, b, c, d)$$

である。三つ目の図 3.48 (c) の解は Mindlin の解 (1936) と呼ばれている。 R_1 は x_3 軸上の $x_3 = c$ からの距離で、 R_2 はその鏡像点の $x_3 = -c$ からの距離である。このときポテンシャルは、 P_3 に対しては

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{P_3}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{R_1} + (3-4\nu) \frac{1}{R_2} + 2c \frac{x_3+c}{R_2^3} \right\}, \quad (3.241a, b, c)$$

$$\beta = \frac{P_3}{8\pi(1-\nu)} \left\{ -\frac{c}{R_1} - (3-4\nu) \frac{c}{R_2} + \frac{1}{2} [(3-4\nu)^2 - 1] \ln(R_2 + x_3 + c) \right\} \quad (3.241d)$$

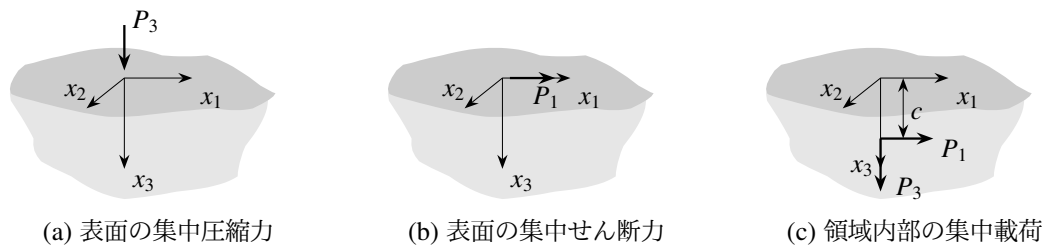


図 3.48 半無限領域の表面あるいは内部における载荷

である。一方、 P_1 に対しては

$$B_1 = \frac{P_1}{8\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{P_1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{2(1-2\nu)x_1}{R_2(R_2+x_3+c)} - \frac{2cx_1}{R_2^3} \right\}, \quad (3.242a, b, c)$$

$$\beta = \frac{P_1(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \left\{ -\frac{(1-2\nu)x_1}{R_2+x_3+c} + \frac{cx_1}{R_2(R_2+x_3+c)} \right\} \quad (3.242d)$$

である。いずれも応力は特異になる。

演習問題 3-13

21. 微分の練習みたいなものだが、式 (3.237) を誘導せよ。

‘whatchamacallit:’ 会話中の「あれ」とか「名前忘れたけどあのあれ」という意味で使う。元は ‘what-do-you-call-it’ とか ‘what-you-may-call-it’ とされる。これを商品名とする candy bar があったが、その TV CM が面白かった。子供が数人出てきて、その candy bar を食べている子が「やっぱ ‘whatchamacallit’ が一番だよなあ」に対し、他の子が「え! その『あれ』って何なんだよお」がしばらく続く・・・だったと思うのだが。YouTube に動画あり。



写真 3.5 酒田みらい橋 無筋繊維補強コンクリート外 PC ケーブル歩道橋 2002 年竣工



‘On the house.’ とときどき日本人学生数名で O ホテルのバーに行って飲んだ。Evanston は dry town だったからだ。一人 2 (?) ドルくらいをテーブルの上に出してビールを注文し、残ったのを適当に tip にする。これが慣例よりはよかったのか、ウェイトレスは僕らを覚えてくれていた。あるとき最後にある銘柄を頼んだところ、それが売り切れていたからと別銘柄のビールの pitcher を持ってきた彼女はこう言って、テーブルの上にあるお金を持って行かなかった。これは「つけ」という意味だろうか、皆ちょっとオドオドしながら帰った記憶がある。



写真 3.6 安治川（多分，天保山）橋梁 斜張橋の桁側ケーブル定着部 1991 年竣工



‘あいがともしゃげもした.’ 鹿児島弁というのは津軽弁と同様ほとんど外国語だが，古い言葉が残っている点と丁寧な言い方をする点が特徴ではないだろうか。また一語中のイントネーションがほとんど無い代わりに，語尾はたいていは上がる。標準語でいいから，抑揚を極力抑えた上で，息継ぎと句読点の直前だけちょっと上げてみれば，それでほとんど鹿児島弁，呵呵。

「さつま芋」というのがある。薩摩から伝わったからだろう。では伝えた薩摩では何と呼ぶか。「から芋」である。唐から伝わったから（？おっと中南米原産らしいが）。じゃ薩摩がオリジナル発信地の「さつま揚げ」はどうだろう。鹿児島では「つけあげ」「つっけあげ」と呼ぶ。後者の「つけ」は短く小さく発音し，「げ」以外は抑揚は無く最後が上がる。TVCMによると「無塩^{ぶえん}を家庭ですり身にして作ったという。つまり塩漬けではない生の魚で作ったということらしく，方言というのは奥が深い。さて東京弁じゃないか（標準語じゃなくて）と思うのだが，「ありがたいなら芋虫や鯨」ってのはわかるだろうか。もう一つ「ありがた^{はたち}うなら芋虫や二十」（この二十ってのはいろいろあるようだ。友人は百五と言った。3音節なら調子がいい）ってのもある。おもしろい。

第4章

面内曲げと軸力を受ける棒の力学

4.1 初等梁理論

4.1.1 梁とは

第2章では静定トラスと静定梁を用いて内力(抵抗力)の必要性和重要性を説明し、変形して抵抗する細長い構造部材の三つの抵抗力として、軸力と曲げモーメント・せん断力を導入した。しかし、その章の最後の例のように3箇所が支持された2径間連続梁の場合には、曲げモーメントはおろか支点反力すら求めることができなかつた。それは、材料がどのように変形するのかということと、どういう抵抗をするのかということとの、二つの情報¹が組み込まれていなかったことが原因だったことも、第2.4.2節の例で少しだけ説明した。そのため第3章では、変形そのものと抵抗力の定義と、それを用いた材料の抵抗の仕方の記述とモデルの基本について学んできた。ここではその知識を活かして、静定ではないトラスや梁でも解けるような理論の定式化と解法を説明する。ただし、梁を主な対象として重要な「線形系の重ね合わせの原理」という概念を説明する。

さて棒は非常に細長いもの、少し定量的に書くと、3次元空間に横たわる物体のある1方向への拡りが他の2方向への拡り方よりもかなり大きなものとして定義される。このような物体であれば、寸法が一番長い方向への力学諸量の変化に比べて他の2方向への変化はそれほど大きくはならず、何らかの簡略化すなわち近似ができるというのだ。もしそういった近似によって得ることができる理論が明解で、かつ解が実用上問題が無いくらいの精度を持つことができれば、変形できる物体の力学として平面的あるいは3次元解析するよりも、少なくとも設計段階ではとても実用的²である。この章では、そういった工学的に有用な理論としての、主に曲げを受ける棒の力学の定式化を行う。曲げを受ける棒部材を梁と呼んで³いる。ただし基礎理論を詳述したいので、アーチや曲線橋のように曲がった棒(曲がり梁)の力学⁴については触れない。またトラスの弦材のように主に軸力を受ける棒部材を柱と呼ぶ。この軸方向の力学については最初の定式化では含めるが、いわゆる梁の力学についての節では無視する。なお、この文書には力学理論の背景と基本的な応用だけが記されているので、静定ではないトラスと骨組については第4.8節に代表的な解法例をいくつかは列挙しておいたが、抵抗力の発生の仕方等設計で重要な「感性」を十分に身に付けるためには、必ず文献[145]等の多くの演習問題を自分の手を動かして解いて欲しい。

¹ つまり幾何学的運動学的な条件と構成則。第2.4.2節の例で棒が傾いてバネが縮むこととバネが抵抗力を生み出すことに相当する。

² ある程度設計が進めばコンピュータ上の数値解析による3次元計算も有用であるが、類似の昔の設計図面等が無い限り、数値解析だけでは設計はできない。

³ 著者は、作用や変形の状態によって対象の呼び名が変わることにはかなり抵抗があるが、いわゆる工学分野あるいは現場の先輩達とスムーズに仕事をしていく上では、そういった慣習も少しは知っておく必要があるかもしれない。第3章でも述べた「応力度」という呼び方と同様の状況である。ちなみに、後述の座屈が問題になるような大きな軸力を受ける曲げ部材を梁-柱と呼び、座屈の成否とは関係無く空間の任意の方向に向いた多軸状態の細長い部材群から成る構造を骨組と呼ぶ。

⁴ 著者は極座標が苦手だ。

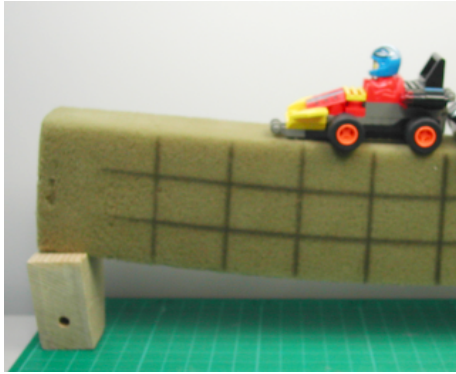


写真4.1 曲がったスポンジの梁

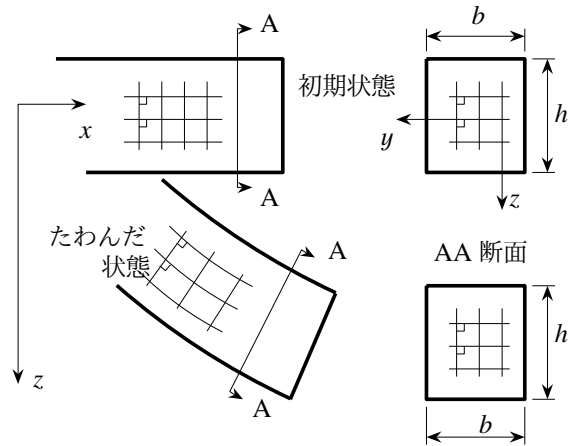


図4.1 曲げを受けた細長い棒の変形状態

4.1.2 支配方程式

(1) 基本的な仮定

曲げを受ける非常に細長い棒を梁と呼ぶことにしたが、簡単なスポンジの実験（写真4.1）を始め多くの実験から、図4.1に示したような、次の二つの基本的な仮定を設けることができそうなことがわかっている。

断面形不変の仮定：断面形は、梁がたわんだあとも変化しない。図4.1の右側の図のように h と b は変化せず、断面に仮想的に引いた交わる二つの線分の成す角度はたわんだあとも変化しない。

Bernoulli-Euler の仮定：梁を側面から見た場合、その面内ではせん断変形が生じず、直交していた2直線は梁がたわんだあとも直交を保つ（図4.1の左側の下図）。スポンジの側面に引いた線分が変形後も直交したままに見える。

この基本的な仮定を満足しながら曲げを受ける梁を **Bernoulli-Euler 梁**あるいは初等梁と呼び、この節で定式化される理論を初等梁理論と呼ぶことがある。あとの図4.4でも説明するが、第3.6.4(3)節の例で求めた梁の応力成分の解の式(3.199)からひずみ成分を計算すれば、曲げを受ける細長い棒で上の二つの仮定が近似的に成立することを確かめることができる。ここでは簡単のためにも、また梁理論の基礎を示すためにも、第2章で例として扱ったような z - x 面内（第2章では x - y 面内）で変形する梁のみを対象とする。

(2) ひずみ場の仮定

図4.1に示したように x 軸を梁の細長い方向に定義し、それを変位前の梁の軸線と呼ぶことにする。また、自重や荷重が鉛直下向きに作用することや、後述の曲げモーメントの正の向きを念頭に置いて、 z 軸を鉛直下向きに⁵定義し、 z - x 面内の曲げ変形をこの章では対象とする。図では z 軸が断面の対称軸としては描かれていないが、以下、特に断らない限り、 z 軸が断面の対称軸に一致するように配置された、奥行き y 軸方向には対称な断面を持つ梁のみを対象とする。梁をモデル化するに当たっての上の二つの仮定を第3章で導いたひずみで表すと、第1の仮定は

$$\epsilon_{yy} = 0, \quad \epsilon_{zz} = 0, \quad \epsilon_{yz} = 0 \quad (4.1a, b, c)$$

⁵ これは西野文雄先生流のやり方で、ほとんどすべての教科書とは異なる。第1著者の qualifying exam で、弦の振動方程式を書くように言われたとき、下向きに z 軸を描いたところ、審査委員の Achenbach 先生から上向きに y 軸を描くように言われた。

である。つまり、断面形状が変化しないことは y - z 面内の 2 方向の伸びと角変化が零になることである。また第 2 の仮定は

$$\epsilon_{xy} = 0, \quad \epsilon_{xz} = 0 \quad (4.2a, b)$$

となる。つまり、ここでは一般論として x - y , z - x 面の両方を取り上げてみたが、曲げを受ける面内の角変化が無い条件が Bernoulli-Euler の仮定である。

(3) 変位成分と伸びひずみ分布

図 4.2 に示したように梁の細長い方向を x 方向に一致させると、二つのひずみ場の仮定式 (4.1) (4.2) からは同図のようなたわんだ状態を描くことになる。すなわち断面形不変の仮定により、ある断面の x 軸から z だけ離れた点 A は、たわんだあともたわんだ状態の軸線（一点鎖線）から同じ距離だけ離れた点 B に変位する。また Bernoulli-Euler の仮定により、 x 軸に直交していた任意の断面はたわんだあとも軸線と直交する。したがって、点 A の 2 方向の変位成分は幾何学的な関係から

$$u_x(x, z) = u(x) + z \sin \theta(x) \approx u(x) + z \theta(x) \quad (4.3a)$$

$$u_z(x, z) = w(x) + z \{\cos \theta(x) - 1\} \approx w(x) \quad (4.3b)$$

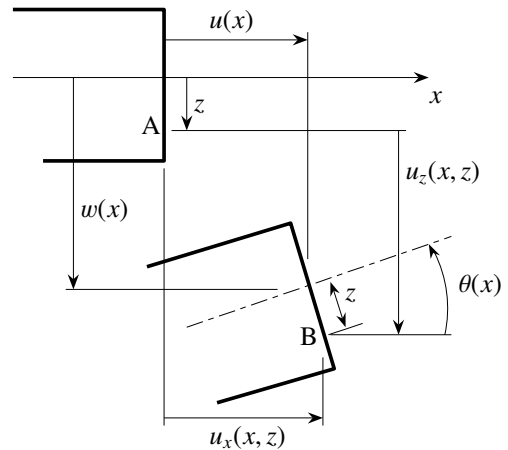


図 4.2 梁の変形と変位成分

となることが明らかである。 $u(x)$ を断面の軸方向変位、 $w(x)$ をたわみ、さらに $\theta(x)$ をたわみ角と⁶呼ぶ。上式の最後の表現ではたわみ角 $\theta(x)$ が非常に小さいので

$$|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta(x) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \approx \theta(x), \quad \cos \theta(x) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \approx 1$$

のように展開した上で、たわみ角の 2 次項以上を無視して近似（線形化）してある。

次に Bernoulli-Euler の仮定式 (4.2b) にこの成分を代入すると

$$2\epsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \theta(x) + \frac{dw(x)}{dx} = 0$$

となり、たわみ角がたわみの 1 階の微係数で近似表現できることを教えてくれる。つまり

$$\theta(x) = -\frac{dw(x)}{dx} \quad (4.4)$$

である。この文書ではたわみ角を反時計回りを正として定義したため、右辺にマイナス記号がある。これを式 (4.3) に代入し直すことによって、微小な変位しか生じない範囲内で梁の変位成分は

$$u_x(x, z) = u(x) - z \frac{dw(x)}{dx}, \quad u_z(x, z) = w(x) \quad (4.5a, b)$$

と⁷なる。大切なことは、任意点の変位が軸線上 ($z = 0$) の点の変位 $u(x)$ と $w(x)$ と、 z の 1 次項だけで表現でき

⁶ 右手系で向きを決めているため、モーメントと正の仕事をするように、通常のとわみ角と逆符号であることに注意すること。

⁷ z - x 面内の運動なので $u_y(x, y, z) = \text{const.}$, $u_x(x, y, z) = u_x(x, z)$, $u_z(x, y, z) = u_z(x, z)$ と考えればいい。これをひずみの定義式 (3.6) に代入すると式 (4.1a) (4.1c) (4.2a) は成立する。そして式 (4.1b) からは

$$\frac{\partial u_z(x, z)}{\partial z} = 0 \rightarrow u_z(x, z) = u_z(x) = w(x)$$

となり、式 (4.2b) からは

$$\frac{\partial u_x(x, z)}{\partial z} = -\frac{\partial u_z(x, z)}{\partial x} = -\frac{dw(x)}{dx} \rightarrow u_x(x, z) = u(x) - z \frac{dw(x)}{dx}$$

となるように、図 4.2 の幾何学的な考察をしなくても、ひずみの仮定を積分して式 (4.5) を得ることができる。

ていることである。このことから3次元物体の物理的挙動が、1次元の(xだけを独立変数とする)理論で表現でき、多分解き易くなりそうだ。

前節の仮定より、零でないひずみ成分は梁の場合には ϵ_{xx} だけになる。定義に従って、式(4.5a)を式(3.6)に代入すると

$$\epsilon_{xx}(x, z) = \epsilon(x) + z\kappa(x), \quad \epsilon(x) \equiv \frac{du(x)}{dx}, \quad \kappa(x) \equiv -\frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (4.6a, b, c)$$

となる。つまり梁を曲げた場合に発生するひずみは、図4.3に示したように $x = \text{const.}$ の任意の断面でz方向に線形分布をすることがわかる。いわゆるひずみの三角形分布と呼ばれるものである。

$\epsilon(x)$ は軸線の「伸び」であり、 $\kappa(x) = \left(\frac{d\theta}{dx}\right) = \frac{1}{\rho}$ は変形して曲がった梁の軸線の「曲率」を表している。 ρ はその曲率半径⁸である。式(4.6)も、梁の断面内の任意点のひずみを軸線上の二つの量とzの1次項だけで表すことができることを示している。このあたりが構造力学の特徴である。つまり、未知関数はxだけの関数になるので、第3章の連続体の力学とは異なり、最終的な支配方程式が常微分方程式になるのである。

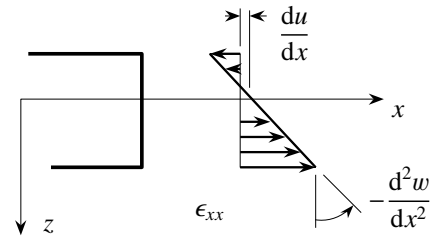


図4.3 伸びひずみの線形分布

(4) 直応力分布

ここでは弾性材料の基本的な梁理論を定式化したいので、材料はHookeの法則に従うものとし、梁の断面寸法が軸方向の長さ比べて非常に小さいので、yとz軸の両方向に平面応力状態と考えた1次元のHookeの法則、つまり式(3.183a)が成立するものとする。これに式(4.6)を代入すれば、直応力が

$$\sigma_{xx}(x, z) = E \epsilon_{xx} = E(\epsilon + z\kappa) = E\left(\frac{du}{dx} - z\frac{d^2w}{dx^2}\right) \quad (4.7)$$

となる。 E はYoung率である。ひずみが図4.3のように線形分布しているから、応力も同様に線形分布する。これは第3章の式(3.199a)の右辺第1項に相当している。この式が、材料の抵抗則を表す構成則であり、この関係式が不静定構造の解析では必要になるのである。つまり、実際にどういった変形が生じ、その材料がどのような抵抗力を發揮して断面力を発生させるのかという情報を、この式(4.7)が与えてくれる。これによって、2径間連続梁のような不静定構造が解けるようになる。

ところが、ひずみに対して仮定した式(4.2b)をそのまません断のHookeの法則式(3.181b)に代入するとせん断応力も生じないことから、もしせん断力を素直に次式で定義すると

$$\epsilon_{xz} = 0 \rightarrow \sigma_{xz} = 0 \rightarrow V \equiv \int_A \sigma_{xz} dA = 0$$

のようにせん断力も生じないことになる。これは式(3.199b)の結果に反するし、第2章でトラスの挙動を拡張したときに斜材の抵抗から得られたような、外力につり合うために

静定梁の断面に生じていたせん断力Vの存在を否定してしまう。ひょっとすると間違っているのではないだろうか。しかし実は細長い物体では、 σ_{xx} の大きさに比べて比較的小さいせん断応力 σ_{xz} しか発生しないことを、これも式(3.199)から示すことができる。図4.4は式(3.199)から算定される応力(座標系が異なるのでこ

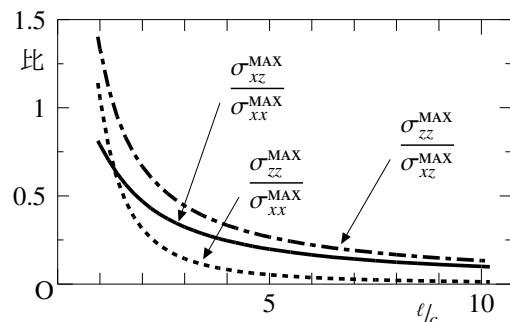


図4.4 細長さと応力成分比の関係

⁸ 直線の曲率半径 ρ は $\rho = +\infty$ なので曲率 κ は零である。ところで、既刊教科書の中には任意の曲線 $y = y(x)$ の図を用いて曲率半径 ρ と関数 $y(x)$ の微係数との関係を説明しているものがあるが、正確な定義はp.686に示したようにそれほど単純ではないので、とりあえず、線形の範囲ではたわみ角と曲率がある直接的な関係にあることを覚えるだけでいい。

の章のそれに合わせて変更した) の最大値同士の比を比べたもので, $\sigma_{xx}^{\text{MAX}} \equiv |\sigma_{xx}(x=0, z=\pm c)|$, $\sigma_{xz}^{\text{MAX}} \equiv |\sigma_{xz}(x=\pm l, z=0)|$, $\sigma_{zz}^{\text{MAX}} \equiv |\sigma_{zz}(z=c)|$ と定義して, それぞれの比を細長さ l/c に対して示したものである。それぞれ異なる位置で生じた最大値なので, オーダー比較くらいの意味しか無いことには注意して欲しい。このように細長い梁では, σ_{xx} に比べて他の2成分が少なくとも一桁くらい小さい量

$$\sigma_{xx}^{\text{MAX}} \gg \sigma_{xz}^{\text{MAX}} \gg \sigma_{zz}^{\text{MAX}} \quad (4.8)$$

であることがわかる。つまり, 式(4.7)で得た直応力は二つの基本的な仮定を厳密に用いたことによる結論であるが, 本当は零ではないせん断応力については別途検討する必要があることには留意する必要がある。つまり, 初等梁理論が細長い物体に対する近似解に過ぎないことは明らかである。ただこの理論を用いる限り, 実験等との比較から, 特に式(4.7)の直応力 σ_{xx} を工学的に十分な精度で計算できることもわかっている。したがって大胆ではあるが適切な仮定で現象をモデル化することにより, 常微分方程式で表現されて取り扱いが楽な理論がここに構築されようとしている。せん断応力の算定法については第4.6節で説明する。

(5) 合応力と応力

第2.3.3節ではトラスからの大胆な類推で梁の中の応力分布を示し, それによって生じる梁の抵抗力の一つの曲げモーメントを定義した。ここでは前節で求めた応力分布を用いて, 曲げモーメントに加えて軸力もきちんと定義し直す。さらにそれが, ひずみおよび変位とどのような関係を持っているかについても求めておく。まず, 軸力は断面内の直応力の総和なので, 断面積を A としたとき

$$N(x) \equiv \int_A \sigma_{xx}(x, z) dA = \int_A E \left(\frac{du(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) dA = EA \frac{du(x)}{dx} - EJ_z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (4.9)$$

となる。ここに

$$A \equiv \int_A dA, \quad J_z \equiv \int_A z dA \quad (4.10a, b)$$

で定義され, J_z は断面1次モーメントと呼ばれる断面定数⁹で, 純粋に断面の形状のみに依存した定数である。

一方, 曲げモーメントは y 軸回りの偶力による抵抗力なので

$$M(x) \equiv \int_A z \sigma_{xx}(x, z) dA = \int_A z E \left(\frac{du(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) dA = EJ_z \frac{du(x)}{dx} - EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (4.11)$$

という関係になる。ここに I は断面2次モーメントと呼ばれる断面定数¹⁰で

$$I \equiv \int_A z^2 dA \quad (4.12)$$

で定義される。この二つの関係式(4.9)(4.11)が, 断面力と軸線上の変位成分との間の関係式として表現した広義の構成則¹¹であり, 不静定構造を解くのに必要な関係式だ。

なお前節でも述べたように, 仮定によってせん断ひずみを零としているため, その仮定の範囲ではせん断応力も零になるから, 断面力として確かに存在するはずのせん断力は, 変形と関係付けられる内力としては定義

⁹ トラスや梁の力学を教える前に「断面の性質」と称してこういった断面定数を教える教科書は(第1著者も関わった文献[157]も)よくない。初学者にとってはその意味や目的が全くわからないからだ。断面定数を求めることは(少なくとも大学における)構造力学教育の本質ではなく, 断面2次モーメントがなぜ重要なかを教えることこそがその本質だからである。

¹⁰ 第1著者が学部2年生のときの専門科目で経験した最初の衝撃は, 東京大学の国分正胤先生のコンクリート工学の宿題だった。学生全員がビニール袋に入った両手一杯くらいのセメントをもらって, 何でもいからレポートせよだ。しかも万年筆で書かねばならない。下宿の近くの工事現場から砂とベニヤ板をもらい, 箆箱くらいの無筋コンクリートを作って3点曲げをした。しかし, 同時並行の構造力学の勉強をしていなかったため, グラフの荷重軸は断面2次モーメントではなく断面積で割ってまとめた。提出当日になってそれに気づき, 万年筆で加筆してグラフも直した。もう滅茶苦茶だ。講義中に国分正胤先生は何人かのレポートを取り出して批評したが, よりによってそのレポートも見つかって怒られた。まさに Murphy の法則である。

¹¹ 構成則はあくまでも微視的な応力とひずみの関係式を指すのであり, 断面内の積分で定義した断面力と軸線の変形との関係で表した材料の抵抗則を, ここでは「広義の」という形容詞を付けて区別している。

できない。これは比較的簡単な境界値問題で直応力 σ_{xx} を精度よく求めるために定式化された初等梁理論が持つ矛盾点である。したがってこの節では、変位や変形と直接関係付けられた断面力としてのせん断力は定義することはできないが、次節以降ではもちろん考慮する。もしこういった天下りのせん断力の導入がお気に召さない読者は、第4.9節に示した仮想仕事による支配方程式の誘導を参照して欲しい。

さてさらに、もし x 軸が断面の図心を通るように設定¹²されていれば、図心の定義¹³が「その点を原点とした断面1次モーメントが零になる点」であることから

$$J_z \equiv 0$$

と¹⁴なる。この図心を通る y 軸を中立軸と呼ぶ。このような軸の選択によって、上の二つの断面力と変位成分の関係には連成する項が無くなり

$$N(x) = EA\epsilon = EA \frac{du(x)}{dx}, \quad M(x) = EI\kappa = -EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} = EI \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (4.13a, b)$$

と表すことができる。式(4.13b)では式(4.4)の関係を用いている。つまり、軸力が伸び剛性 EA を抵抗係数として軸線の伸び ϵ という変形による抵抗力であるのに対し、曲げモーメントは軸線の曲率 κ という変形による抵抗力でその抵抗係数が曲げ剛性 EI であることを示している。したがって同じ断面積を持つ断面同士で比較したとき、レール断面のように断面2次モーメントが大きくなる形の方がより大きな曲げ抵抗力を持つ理由がここにある。

さて、合応力とひずみおよび直応力との関係を求めるために式(4.6)(4.7)に式(4.13)を代入すると、伸びひずみと直応力は

$$\epsilon_{xx}(x, z) = \frac{N(x)}{EA} + z \frac{M(x)}{EI}, \quad \sigma_{xx}(x, z) = \frac{N(x)}{A} + z \frac{M(x)}{I} \quad (4.14a, b)$$

と表現¹⁵できる。このように、曲げを受ける部材に生じる応力は断面の上下縁で最大になるため、例えば、中立軸から z 軸方向の最も離れた断面の縁までの z 座標値を用いて、 z の負方向（上方）に $z = e_U (< 0)$ 、正方向（下方）に $z = e_L$ と表すことにすると、その断面 x の正負の最大応力（最外縁応力 $\sigma_{\max}^\alpha(x)$, $\alpha = U, L$ ）は

$$\sigma_{\max}^\alpha(x) = \frac{N(x)}{A} + e_\alpha \frac{M(x)}{I}, \quad \alpha = U, L$$

となる。そこで

$$W_U \equiv \frac{I}{e_U} (< 0), \quad W_L \equiv \frac{I}{e_L} \quad (4.15a, b)$$

のように（この文書特有の）符号付き断面係数を定義すると、曲げ M と軸力 N を受ける梁に発生する（正負の）最大応力は

$$\sigma_{\max}^\alpha(x) = \frac{N(x)}{A} + \frac{M(x)}{W_\alpha}, \quad \alpha = U, L \quad (4.16)$$

と表すことができる。ここの定義では W_α は符号を持つ¹⁶ため、公式集の定義とは異なる（絶対値は同じ）ことに注意して欲しい。

¹² 文献[108, 152]では、曲げ変形のみときに断面にひずみが生じない境界線を梁の軸方向につないだ線を「中立軸」と呼んでいるが、文献[131]ではそれを「中立軸」または「中立面」と呼んでいる。一方文献[195]では、その断面の境界線の方だけを「中立軸」と呼んでいる。また比較的新しい文献[103]でも同様に、断面の境界線を「中立軸」と呼び、それを梁の軸方向につないだ面を「中立面」と呼んでいる。学会出版物[159]では、軸力が生じた場合も含めて断面にひずみが生じない境界線を『中立軸』と呼んでいて、軸力が生じていない場合にのみ『中立軸』が図心を通ると定義している。著者は文献[103]と同じ考えを持っているので、混乱を避けるためにこの文書では「中立軸」という言葉をできるだけ使わないようにした。

¹³ 質量が一樣で断面形状と同じ形をした等厚薄板の「重心」は断面の図心に一致するが、ここで定義したいのは断面1次モーメントが零になる単なる幾何学的な特性を持った点なので、もしかしたら質量が関係するかもしれない「重心」という言葉は使わない。

¹⁴ 微妙な表現になっているが、本来は「 $J_z = 0$ になるように x 軸の位置を決めると、それは図心を通る」となる。

¹⁵ x 軸が断面の図心を通らない一般的な場合には、式(4.9)(4.11)から

$$\epsilon = \frac{1}{1-\phi} \left\{ \frac{N}{EA} - \phi \frac{M}{EJ_z} \right\}, \quad \kappa = \frac{1}{1-\phi} \left\{ -\phi \frac{N}{EJ_z} + \frac{M}{EI} \right\}, \quad \phi \equiv \frac{(J_z)^2}{AI}$$

となることには注意すること。なぜか他の文献には掲載されていないようだ。

¹⁶ 断面係数ってテンソルではないような気がするんですがねえ。断面「定数」という物理量ではないような。

(6) 支配方程式 — 局所的なつり合い式

ここで誘導するつり合い式は梁の中のある点 x の近傍における局所的なつり合い式であり、第2章の前半で対象としていた外力と支点反力のつり合いのような梁全体の巨視的なものとは異なる。つまり第2.3.5節で誘導した微分方程式で表したつり合い式を、もう一度、梁のある微分線要素 dx を取り出して、軸力も含めてそこに生じている内力（断面力）と分布外力のつり合い条件から求めようとしている。

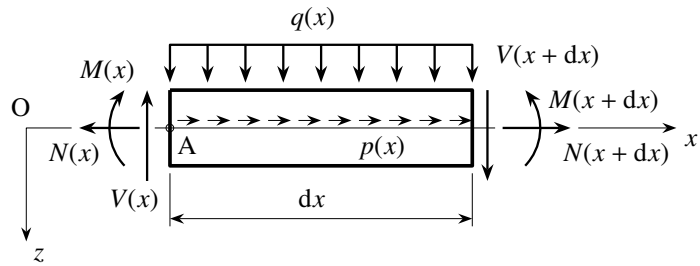


図 4.5 梁の局所的なつり合い

そこで、図 4.5 のように分布外力が作用し、前節で述べたように合応力としてのせん断力 $V(x)$ も発生しているとすると、この微分線要素の z 方向の力のつり合いは

$$V(x+dx) - V(x) + q(x) dx = \left\{ V(x) + \frac{dV(x)}{dx} dx \right\} - V(x) + q(x) dx = 0$$

となることから

$$\frac{dV(x)}{dx} + q(x) = 0, \quad 0 < x < \ell \quad (4.17)$$

がせん断力のつり合い式である。次に点 A の反時計回りのモーメントのつり合いをとってみると

$$M(x+dx) - M(x) - V(x+dx) dx - q(x) dx \frac{dx}{2} = 0$$

となるが、分布外力による項は2次の微小項となるため、結局

$$\frac{dM(x)}{dx} - V(x) = 0 \quad (4.18)$$

がモーメントのつり合い式になる。この式を逆に $V = \frac{dM}{dx}$ と見て、せん断力が曲げモーメントの変化率で定義されていると考えても差し支え無い。これは第2章でも出てきた関係式である。式 (4.18) を式 (4.17) に代入することによって、わけのわからないせん断力 V を見かけ上消去してしまうと、曲げに関するつり合い式は

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + q(x) = 0, \quad 0 < x < \ell \quad (4.19)$$

でいいことがわかる。

最後に x 方向の力のつり合いから

$$N(x+dx) - N(x) + p(x) dx = \left\{ N(x) + \frac{dN(x)}{dx} dx \right\} - N(x) + p(x) dx = 0$$

となるので、軸力のつり合い式が

$$\frac{dN(x)}{dx} + p(x) = 0, \quad 0 < x < \ell \quad (4.20)$$

と求められる。

(7) 変位で表したつり合い式

前節で求めたつり合い式のうち曲げに関するものは当然第2.3.5(1)節で求めた静定系のそれと同じであり、このままでは2径間連続梁のような不静定構造を解くことはできない。そのため、第2.4.2節の例でも示した

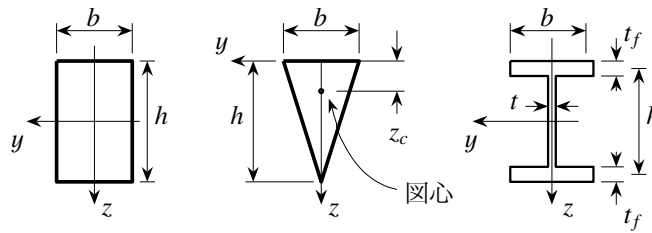


図 4.6 種々断面の断面定数

ように、つり合い式に加えて変形の定義と構成則を考慮する必要がある。そこで式 (4.19) (4.20) のつり合い式に合応力と変形の関係式 (4.9) (4.11) を代入すると、つり合い式を変位成分 $u(x)$, $w(x)$ だけで表すことができる。最終的に x 方向と z 方向のつり合い式はそれぞれ

$$\frac{d}{dx} \left\{ EA \frac{du(x)}{dx} - EJ_z \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right\} + p(x) = 0, \quad (4.21a)$$


$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ EJ_z \frac{du(x)}{dx} - EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right\} + q(x) = 0 \quad (4.21b)$$

と表現できる。もし断面が一様でかつ x 軸が図心を通るように設定されれば、この二つの式は

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + p(x) = 0, \quad -EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + q(x) = 0 \quad (4.22a, b)$$

と書くことができる。第 2.3.5 節のつり合い式は曲げモーメント $M(x)$ を未知関数とするものだったが、それを変位成分 $u(x)$, $w(x)$ を未知関数とするつり合い式に書き直して用いることによって不静定構造が解けるようになるのである。

演習問題 4-1

1. 第 1 章の毛利元就の逸話に関連して示した 3 本の矢を組んだ断面  をこの図の向きに置いた場合、その中立軸の位置と断面 2 次モーメント・断面係数を求めよ。
2. 図 4.6 の幅 b ・高さ h の矩形断面で、高さの中央に引いた軸を y 軸とする場合の断面 2 次モーメントと断面係数を求めよ。
3. 図 4.6 のように逆三角形の上辺に y 軸があるとして、断面 2 次モーメントおよび断面 1 次モーメントを求め、 y 軸をどれだけ z 方向に移動したら図心を通るようにできるのか求めよ。その上で、図心を通る軸回りの断面 2 次モーメントと断面係数を求めよ。
4. 図 4.6 のような 2 軸対称 I 形断面の場合の図心は断面の中心に一致するが、その図心を含む軸回りの断面 2 次モーメントと断面係数を求めよ。さらに、上下のフランジ部分の断面 2 次モーメントは

$$I(\text{フランジ部分}) = (\text{フランジ自体のその図心回りの断面 2 次モーメント}) \\ + (\text{フランジ断面積}) \times (\text{軸からフランジ図心までの距離})^2$$

で算定できることを示せ。さらに、鋼の板構造のように肉厚が非常に薄い場合 ($h, b \gg t, t_f$) には、上式右辺の第 1 項を無視した簡便な表現で近似できることも確認せよ。

4.1.3 境界条件

(1) 3 種類の境界条件

前節で求めたつり合い式は、長さ l の梁なら $0 < x < l$ の任意点で成立しなければならない常微分方程式である。その一般解には微係数の階数に相当する数の積分定数という未定定数が含まれる。この積分定数を決定す

るのは支持条件であり、それは境界条件と呼ばれる。まず基本的な境界条件として、長さ l の 1 本の梁の両端の支持条件から境界条件を誘導しておこう。

基本的な境界条件には 2 種類ある。一つは変位を与えるものである。すなわち梁の場合には、この与える変位成分として x 方向の水平移動量 u と z 方向のたわみ w が考えられるが、実はもう一つある。それは第 2 章でも例として解いた片持ち梁の壁側の条件を考えてみれば明らかであるが、たわみだけではなくたわみ角 θ も零になる境界が埋めこみ端である。以上の幾何学的な考察から、 u と w および θ を与えるのが変位の境界条件で、幾何学的境界条件とも呼ばれ¹⁷る。

もう一つの条件は外力が作用している境界のものである。第 3 章で定義したように、内力の符号は発生している面の外向き法線方向を正にすると定義されているため、その応力の断面内の合計として考えている断面力も、断面の法線が向いている方向が正の向きになる。これに対し、外力の成分の正の向きは常に座標の正の方向で定義するのが普通である。曲げについては既に第 2.3.5 節で説明したが、再度、この力の境界条件については図を用いて注意深く誘導することにしよう。

図 4.7 に示したのは $x = 0$ つまり座標値の小さい方の端の条件である。梁の端部の厚さの無い部分を切り出すと、その梁内部側の面は x 軸の正方向を法線ベクトルとする正の面であるから、断面力も座標の正の方向がすべて正の内力である。一方、外力は図のように座標方向をすべて正の向きとして定義した。この厚さの無い部分の力のつり合いより

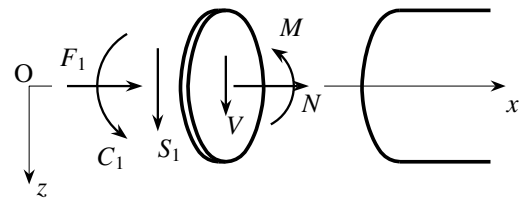


図 4.7 梁の左端の力の境界条件

$$N + F_1 = 0, \quad V + S_1 = 0, \quad M + C_1 = 0$$

とならなければならないから、左端の力の境界条件は次のようになる。

$$-N = F_1, \quad -V = S_1, \quad -M = C_1 \tag{4.23a, b, c}$$

一方図 4.8 は $x = l$ 側、つまり座標値の大きい端の条件である。この場合、内力が生じている面が負の面であることに注意すれば、右端の力の境界条件は

$$N = F_2, \quad V = S_2, \quad M = C_2 \tag{4.24a, b, c}$$

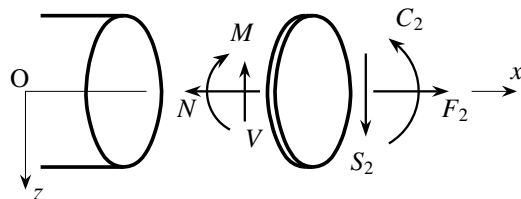


図 4.8 梁の右端の力の境界条件

となることは明らかである。力の境界条件は力学的境界条件とも呼ばれる¹⁸が、式 (4.23) と式 (4.24) を比較すればわかるように、端部の断面が正の面なのか負の面なのかで内力成分の符号が逆になっていることに注意すべきである。

以上の 2 種類の境界条件がそれぞれの端部でそれぞれ六つずつあるが、その任意の組み合わせ、あるいはすべてを与えることができるだろうか。その答は否であり、ある種の組み合わせで境界条件を与えない限り解が唯一に定まることは無いし、場合によっては解が存在しないこともある。例えば支承上はたわみを零にする条件だが、同時にその反力（この場合は z 方向外力 S_i ）も与えることができるだろうか。静定構造でない限りこの支点反力を予め与えることはできないから、一般論として両方を同時に与えることができないことは容易に想像できる。このように考えると、正しい組み合わせの境界条件は

$$u = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i N = F_i, \tag{4.25a}$$

¹⁷ Dirichlet 条件あるいは第 1 種条件または本質的境界条件とも呼ぶ。

¹⁸ Neumann 条件あるいは第 2 種条件または自然境界条件とも呼ぶ。

$$w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i V = S_i, \quad (4.25b)$$

$$\theta = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i M = C_i \quad (4.25c)$$

($i = 1, 2$) であり、それぞれの端部で適切に三つずつ与えられなければならないことが明らかになる。上式では簡単のために

$$n_i \equiv \begin{cases} -1, & \text{左端 } x = 0 \text{ で } (i = 1) \\ +1, & \text{右端 } x = \ell \text{ で } (i = 2) \end{cases} \quad (4.26)$$

という記号を用いた。 n_i は端部断面の外向き単位法線ベクトルと x の正方向の単位ベクトルとの内積の値と考えればいい。境界条件のこの組み合わせがなぜ正しいのかについて疑問を覚えた読者は第4.9節の数学的誘導を参照して欲しいが、この式(4.25)の「あるいは」で挟んだ変位と外力の組については、仕事 (u と F_i , w と S_i , θ と C_i のそれぞれの積がそれぞれの外力がする仕事である) という観点から眺めれば、それほど不思議なものではないことが理解できるかもしれない。これも例えば後述する式(4.111)の外力の仮想仕事をみて欲しい。

以上が基本的な二つの境界条件であるが、例えば浮体に載せられた梁や弾性的な支持条件等の場合には、この幾何学的境界条件と力学的境界条件が分離されず、二つが組み合わせられて与えられることになる。例えば図4.9 (図は右端の場合の例)のように、バネ定数 k の線形バネで支持された場合のせん断力についての境界条件は、この端部の力のつり合いから

$$n_i V + k w = S_i \quad (4.27)$$

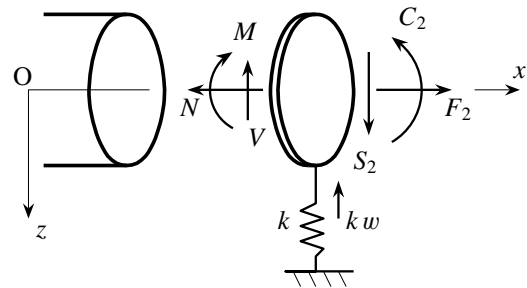


図4.9 変位と力が組み合わされた境界条件

となるのがわかる。この境界条件を、基本的な2種類の境界条件が組み合わさった条件であることから、第3種の境界条件と呼ぶ¹⁹ことがある。

(2) 変位で表した境界条件

不静定構造を解くためにはつり合い式と同様、力の境界条件も変位成分 $u(x), w(x)$ で表しておく必要がある。そこで式(4.25)に式(4.9)(4.11)を代入し、式(4.18)のせん断力と曲げモーメントの関係を用い、さらに一様断面で図心を通るように x 軸を選んだ場合には、両端 ($i = 1, 2$) の境界条件式は

$$u = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left(EA \frac{du}{dx} \right) = F_i, \quad (4.28a)$$

$$w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left(-EI \frac{d^3 w}{dx^3} \right) = S_i, \quad (4.28b)$$

$$-\frac{dw}{dx} = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left(-EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = C_i \quad (4.28c)$$

と表現できる。また、式(4.27)のように幾何学的なものと同様の力学的なものが混在する境界条件の場合も同様な演算で変位表示できるが、この例の場合にはせん断力に関する境界条件式が³

$$n_i \left(-EI \frac{d^3 w}{dx^3} \right) + k w = S_i \quad (4.29)$$

になる。

¹⁹ Robin 条件あるいは第3種条件または混合条件とも呼ぶ。

(3) 解は無い、あるいは唯一ではない?

最後に、式(4.25)では詳しくは説明しなかった境界条件の組み合わせ方についてさらに理解を深めるために、図4.10に示したように、両端に同じ大きさ P の軸方向外力が逆向きに作用している棒を解いてみよう。この場合の境界条件は



図4.10 同じ力で両端を圧縮した棒

$$-EA \frac{du}{dx}(0) = F_1 = P, \quad EA \frac{du}{dx}(l) = F_2 = -P$$

となる。一方、軸方向変位 u で表したつり合い式(4.22a)の分布外力 $p(x)$ は零だから一般解は $u(x) = ax + b$ である。上の境界条件にこれを代入して二つの積分定数 a, b を決めようとしても、最終的には

$$a = -\frac{P}{EA}, \quad b = \text{不定} \quad \rightarrow \quad u(x) = u(0) - \frac{P}{EA}x, \quad u(0) = \text{棒全体の任意の移動量} = \text{不定}$$

となってしまふ。これは解が存在しないのではなく無数に存在する(唯一には存在しない)ことを意味している。つまり、この棒は相対的に縮んでいれば(上式 $u(x)$ の第2項の $\{P/EA\}$ が縮みひずみで、 $\{P/EA\}$ が左端に対する相対的な縮み変位)、水平方向のどの位置に剛体的に移動(上式の $u(0)$ の分)しても、その位置でつり合って静止できることを示しているに過ぎない。また左右の軸力が異なる場合には解が存在しない(外力同士すらつり合っていないのだから当然で、運動してしまう)ことになる。

すなわち、境界条件が式(4.28)のような三つの組み合わせで与えられている必要がある上に、両端で適切な与え方をしないと解が唯一ではなかったり存在しなくなったりすることには十分注意する必要がある。数値計算等で境界条件の与え方を間違ふと結果が出ない(計算がエラーで終わる)ことがあるので注意が必要である。一般論として、解が存在するか否か、存在する場合に唯一であるかどうかについては、第5.4.2節でも例示する。

4.1.4 境界値問題の例

(1) 変位で表したつり合い式と境界条件

変形できる細長い棒の支配方程式と境界条件が前節までに求められたが、構造力学の問題はこの支配方程式を境界値問題として表して解くことである。ところで、図心を通るように x 軸を選んだ場合には式(4.22)のように軸の伸び縮みと曲げを分離して表現できることから、前述のように、軸の伸び縮みで主に抵抗する部材を柱、主に曲げとせん断で抵抗する部材を梁と称する。そしてこの文書では文献[172]に倣って、その両方の抵抗を持つ部材を棒と呼ぶ²⁰が、その棒を組み合わせた構造は骨組²¹と呼ばれることも既に述べた。以下では主に梁だけを対象とする。柱(つまりトラス)については[170]に厳密な解説があるので参照して欲しいが、いくつかの解析例を第4.8節に示した。ただし、実際の骨組部材は通常立体的に配置されていることから、ねじりも含む曲げも軸力も連成した構造部材になっていることには留意する必要がある。これについては第7章の立体骨組の節で説明する。

一様断面で x 軸が図心を通る梁に限定してつり合い式と境界条件を再度列挙しておく、まずつり合い式は

$$-EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + q(x) = 0 \quad (4.22b) \text{ 再掲}$$

であった。また基本的な境界条件式は

$$w = \text{与える} \text{ あるいは } n_i \left(-EI \frac{d^3 w}{dx^3} \right) = S_i, \quad (4.28b) \text{ 再掲}$$

²⁰ 「柱」と「梁」を合体させた「梁-柱」という呼び名が別の特殊な部材に使われるからだ。第6.4節を参照のこと。

²¹ あるいはラーメン(もちろんドイツ語である)と呼ぶが、一般に試験等に出てくる骨組(呵呵)では柱としての抵抗が無視されることが多い。第4.8節を参照のこと。

$$-\frac{dw}{dx} = \text{与える あるいは } n_i \left(-EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) = C_i \quad (4.28c) \text{ 再掲}$$

であった。さらに、式(4.27)のように幾何学的なもの力学的なものが混在する例の場合には、せん断力に関する境界条件式は

$$n_i \left(-EI \frac{d^3w}{dx^3} \right) + k w = S_i \quad (4.29) \text{ 再掲}$$

であった。この節では以下、基本的な境界値問題の例を対象にして、この微分方程式を解くことによってたわみや曲げモーメント等を求める標準的手法をまずは説明しておこう。

(2) 標準的な境界値問題の解法

最初の例では、微分方程式と境界条件で設定された問題の標準的な解法を説明するために、図4.11に示した等分布外力を受ける左端固定右端単純支持の不静定梁を解いておく。支点反力が左で二つ右で一つ計3個なので、力のつり合いだけでは解けない不静定構造であることはわかると思う。境界条件は

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(\ell) = 0, \quad -EIw''(\ell) = 0$$

と与えられる。なお(′)は x に関する微係数を表しており、以下頻繁に用いる。

最後の境界条件は、右端は回転自由で、その代わり外力モーメントが作用していないというものである。式(4.22b)の $q(x)$ が定数 q_0 であるから特解は $\left(\frac{q_0 x^4}{24EI}\right)$ となる。 $q(x)$ が無い場合の(斉次あるいは同次)式(4.22b)に $w \sim \exp(\xi x)$ を代入して得ることができる特性方程式の根は $\xi = 0$ の4重根になるので、その斉次解は x の3次多項式である。したがって一般解を

$$w(x) = \frac{q_0}{24EI} (x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d) \quad (4.30)$$

と表すことができる。微係数を算定しておく

$$w'(x) = \frac{q_0}{24EI} (4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c), \quad w''(x) = \frac{q_0}{24EI} (12x^2 + 6ax + 2b)$$

となる。これを上の境界条件に代入すると

$$d = 0, \quad c = 0, \quad \ell^4 + a\ell^3 + b\ell^2 + c\ell + d = 0, \quad 12\ell^2 + 6a\ell + 2b = 0$$

を得る。これから a と b を未知数とする条件式が

$$\begin{pmatrix} \ell & 1 \\ 3\ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \ell^2 \\ 6\ell^2 \end{pmatrix}$$

となるので、これを解けば a, b が

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3\ell & \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell^2 \\ 6\ell^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\ell/2 \\ 3\ell^2/2 \end{pmatrix}$$

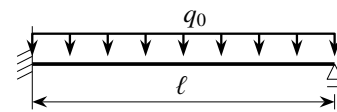


図4.11 等分布外力を受ける片端固定・片端単純支持梁

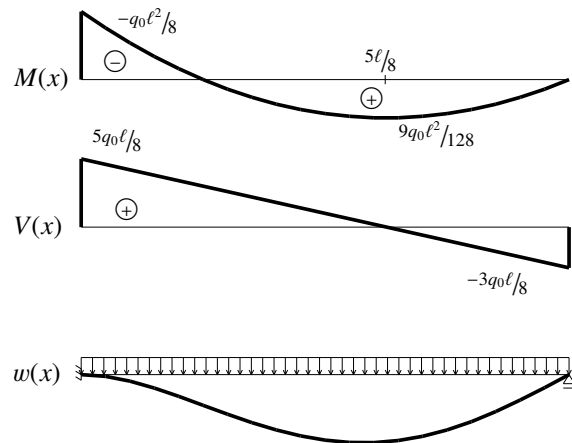


図4.12 等分布外力が作用した不静定梁の例

と求められる。この結果を式(4.30)に代入し直せば、任意点の変位が

$$w(x) = \frac{q_0 x^2}{48EI} (3\ell - 2x)(\ell - x) \tag{4.31}$$

となる。上式を2回微分すれば曲げモーメント分布が

$$M = -EIw''(x) = \frac{q_0}{8} (\ell - x)(4x - \ell) = -\frac{q_0}{2} \left\{ \left(x - \frac{5\ell}{8} \right)^2 - \frac{9\ell^2}{64} \right\} \tag{4.32}$$

となり、さらにもう1回微分すれば、せん断力分布が $V = -EIw'''(x) = q_0 \left(\frac{5\ell}{8} - x \right)$ となる。これをたわみ形状と共に示したのが図4.12である。これより、左端の支点反力モーメントは式(4.32)に $x = 0$ を代入して、境界条件式(4.28c)の符号に気を付ければ

$$C_1 = \frac{q_0 \ell^2}{8} \tag{4.33}$$

となる。また上のせん断力に $x = 0, \ell$ を代入して、これも境界条件式(4.28b)の符号に気を付ければ

$$S_1 = -\frac{5q_0 \ell}{8}, \quad S_2 = -\frac{3q_0 \ell}{8}$$

と支点反力が求められる。このように不静定梁の場合は、構造全体の変形が求められたあとにしか支点反力も求められない。曲げモーメント図とせん断力図の左右端の値と反力の値の符号の違いには十分注意すること。

(3) 両端固定梁

次の例は図4.13の両端固定の梁である。境界条件は両端で

$$w = 0, \quad -w' = 0$$

となる。分布外力条件は前の例と同じなので、一般解は式(4.30)と同じである。また左端の境界条件も前の例と同じなので、中間的な解の表現として

$$w(x) = \frac{q_0}{24EI} (x^4 + ax^3 + bx^2)$$

と置いていい。これとこの1階の微係数を右端の境界条件に代入すると

$$\begin{pmatrix} \ell & 1 \\ 3\ell & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \ell^2 \\ 4\ell^2 \end{pmatrix}$$

を得る。これを解けば結局 $a = -2\ell, b = \ell^2$ となり、たわみが

$$w(x) = \frac{q_0 x^2}{24EI} (\ell - x)^2$$

と求められる。この2階の微係数から曲げモーメント分布を得ることができるが、特に端部の不静定モーメントは

$$C_1 = -C_2 = \frac{q_0 \ell^2}{12} \tag{4.34}$$

となる。また支点反力も

$$S_1 = S_2 = -\frac{q_0 \ell}{2}$$

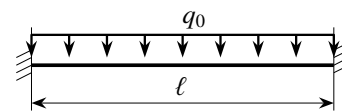


図4.13 等分布外力を受ける両端固定梁

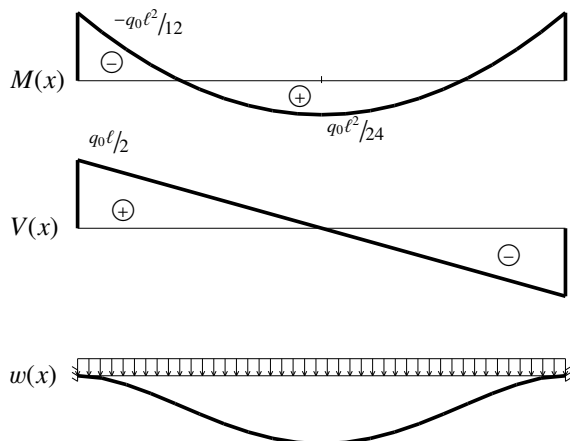


図4.14 等分布外力が作用した両端固定梁の各量

となる。これは実は、構造が左右対称なので静定系と同じように力のつり合いでも求められる。図4.14に各図を示しておいた。

以上の二つの結果の図4.12, 4.14からも明らかなように、1スパンの不静定梁の場合には、両端の不静定モーメントを求めさえすれば、それに静定梁の曲げモーメント分布を重ね合わせることによって答を得ることができている。その重ね合わせによる解法は後述するが、不静定モーメントを求めるだけなら第5章で解説する方法が便利であり、現在では実用的にも広く用いられている。歴史的には他にも数多くの手法が考案されてきたが、この文書ではそういった古典的な方法については適切に取捨選択した。以上のように、不静定構造の場合には変位を未知数とした境界値問題を解くことによって、その支点反力や不静定モーメントおよび曲げモーメント分布等を求めることができることは理解してもらえたと思う。

(4) 単純梁のたわみ

静定梁を扱った第2章では求めることができなかったたわみを求めておこう。というのも、後述の重ね合わせ手法を用いて不静定梁を解くときにその情報が利用できるからだ。さて、単純梁のような静定構造の場合は曲げモーメント分布が簡単に算定できるので、たわみを未知数とする4階の微分方程式から解き始める必要は無い。図4.15は最も基本的な静定梁である。この場合は第2.3.5(2)節で曲げモーメント分布が求められており

$$M(x) = \frac{q_0}{2} (\ell x - x^2)$$

となっていた。したがって式(4.22b)のつり合い式まで遡らずとも、式(4.13b)の曲げモーメントと曲率の関係に上のモーメント分布を代入すればいい。つまり

$$-EIw'' = \frac{q_0}{2} (\ell x - x^2)$$

を解けばいい。

両端の幾何学的境界条件は共に $w = 0$ であるから、上式を2回積分した一般解

$$w(x) = \frac{q_0}{2EI} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{\ell x^3}{6} + ax + b \right)$$

を境界条件に代入すれば $a = \ell^3/12$, $b = 0$ となり、たわみが

$$w(x) = \frac{q_0 x}{24EI} (\ell - x) (\ell^2 + \ell x - x^2) \quad (4.35)$$

と求められる。1回微分すると、特に両端のたわみ角は

$$-w'(0) = -\{-w'(\ell)\} = -\frac{q_0 \ell^3}{24EI} \quad (4.36)$$

となる。図4.16にたわみ形状を示した。

(5) 端部集中外力モーメントの作用

次の例は図4.17にあるように、単純梁の左端に集中モーメントを加えたものである。これも静定構造であり、曲げモーメント分布が $\{C_0(x/\ell - 1)\}$ と求められる。これを曲げモーメントとたわみの関係に代入して微分

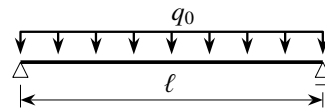


図4.15 等分布外力が作用した単純梁

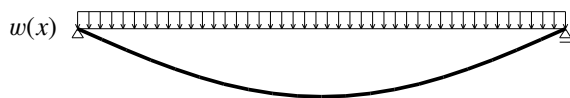


図4.16 等分布外力が作用した単純梁のたわみ

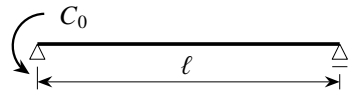


図 4.17 片端に外力モーメントが作用した単純梁

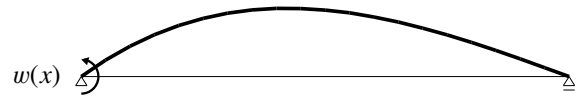


図 4.18 そのたわみ形状

方程式を解き、両端でたわみが零になる条件で積分定数を決めれば、最終的にたわみの解が

$$w(x) = \frac{C_0 x}{6EI} (x - 2\ell)(\ell - x)$$

となる。1回微分すると、両端のたわみ角が

$$-w'(0) = \frac{C_0 \ell}{3EI}, \quad -w'(\ell) = -\frac{C_0 \ell}{6EI} \tag{4.37a, b}$$

と算定される。図 4.18 にたわみ形状を示しておいた。静定系なので支点反力はつり合い式で求められる。

(6) 片持ち梁のたわみ

次の例も代表的な静定構造で、先端にせん断外力が作用した図 4.19 の片持ち梁である。曲げモーメント分布は $\{Q(x-\ell)\}$ だから、これを 2 回積分して積分定数を左端の幾何学的境界条件から決定すると、たわみは最終的に

$$w(x) = \frac{Qx^2}{6EI} (3\ell - x) \tag{4.38}$$

となる。先端のたわみとたわみ角は

$$w(\ell) = \frac{Q\ell^3}{3EI}, \quad w'(\ell) = \frac{Q\ell^2}{2EI} \tag{4.39a, b}$$

となる。図 4.20 にはたわみ形状を示した。

あるいは、先端に集中外力モーメントだけが作用した場合には、モーメント分布は $M(x) = C_0$ と一定になるのでこれも簡単に微分方程式が解け、固定端の幾何学的境界条件に代入することによってたわみが、そしてその微係数から先端のたわみ角が

$$w(x) = -\frac{C_0}{2EI} x^2, \quad -w'(\ell) = \frac{C_0 \ell}{EI} \tag{4.40a, b}$$

と求め²²られる。たわみ形状を図 4.21 に示した。

(7) 弾性支持された片持ち梁

最後に、弾性支持された図 4.22 の不静定梁を解いておこう。一般解は式 (4.30) と同じになり、右端の力学的境界条件が式 (4.29) で表現されることだけに注意すれば、境界条件は

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad -EIw''(\ell) = 0, \quad -EIw'''(\ell) + kw(\ell) = 0$$

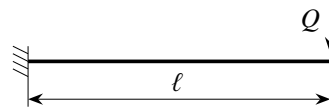


図 4.19 先端にせん断外力が作用した片持ち梁

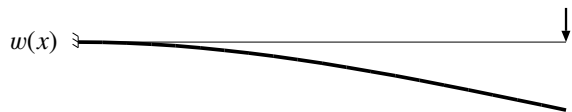


図 4.20 せん断を受ける片持ち梁のたわみ

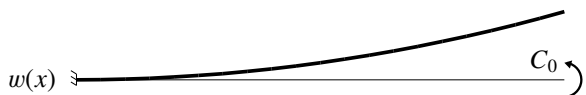


図 4.21 先端に集中外力モーメントが作用した片持ち梁

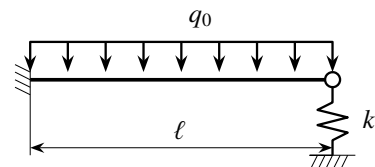


図 4.22 弾性支持された片持ち梁

²² 式 (4.39) (4.40b) 等は、分母の数字と分子のべき乗が一致していて覚え易い。公務員試験（著者は受けたことがないが）等への対策のためにこれは記憶しておいた方がいい。

である。以上の四つの条件に一般解を代入すると $c = d = 0$ と

$$6\ell^2 + 3a\ell + b = 0, \quad \frac{k\ell^2}{EI} (\ell^2 + a\ell + b) - (24\ell + 6a) = 0$$

という関係を得、これを解くと

$$a = -\frac{\ell}{2\left(3 + \frac{k\ell^3}{EI}\right)} \left\{24 + \frac{5k\ell^3}{EI}\right\}, \quad b = \frac{3\ell^2}{2\left(3 + \frac{k\ell^3}{EI}\right)} \left\{12 + \frac{k\ell^3}{EI}\right\}$$

を得る。これよりバネ支持された点のたわみを求めると

$$w(\ell) = \frac{3q_0\ell^4}{8EI(3 + \alpha_s)} \quad (4.41)$$

となる。ここに

$$\alpha_s \equiv \frac{k\ell^3}{EI} \quad (4.42)$$

は弾性支持バネの影響を代表する無次元パラメータである。支点反力は得られたたわみ $w(x)$ の微係数を求めれば計算することができるが、ここでは省略する。弾性支持という状況は最初はあまり理解できないかもしれないが、実際の支持条件を観察した場合に、よほど強固な岩盤に直接設置された支持でない限り、荷重によっては一時的に沈下する支持条件も存在する。それよりも、強固な地盤・岩盤で支持されていない部分を近似的にモデル化するような場合等にも、この弾性支持という条件は用いられることがあることは覚えておいて欲しい。身近な例は写真 1.4 の電気機関車を載せたレール（梁）の枕木がバラストで支持されている状況である。

(8) 連続梁

不静定構造の代表例として連続梁を挙げていたので、順序としてはここでその例を解くべきであろうが、特に理由も無いままその例は第 4.2.2 (4) 節で示すことにしたい。

演習問題 4-2

- 図 4.19 の片持ち梁のたわみを求め、式 (4.39) を確認せよ。
- 図 4.23 に示した等分布外力が作用した片持ち梁のたわみと支点反力を求めよ。静定構造ではあるが、両端の四つの境界条件を用い 4 階の微分方程式を解くことによって求めよ。それで求められるモーメント分布が、力のつり合いから求めたものと一致することを確認せよ。また先端のたわみは

$$w(\ell) = \frac{q_0\ell^4}{8EI} \quad (4.43)$$

になるが、これは式 (4.41) において支持バネ定数を零つまり $k = 0$ あるいは $\alpha_s = 0$ とした解でもある。

- 図 4.17 の例を参考にして図 4.24 の問題を解き、両端のたわみ角が図 4.17 の例の逆で

$$-w'(0) = -\frac{C_0\ell}{6EI}, \quad -w'(\ell) = \frac{C_0\ell}{3EI} \quad (4.44a, b)$$

となっていることを示せ。

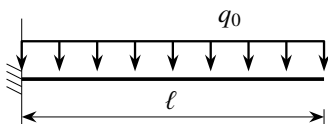


図 4.23 等分布外力が作用した片持ち梁

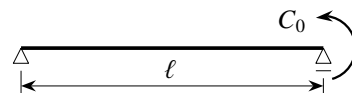


図 4.24 右端に集中外力モーメントが作用した単純梁

4.2 梁中間の集中せん断力や集中モーメントの作用

4.2.1 梁中間の集中外力の作用と連続条件

ここまでは1径間の梁に分布外力や端外力が与えられた系を対象として、一般的な梁の境界値問題の解法の基礎と特徴を説明してきた。第2章の静定梁ではつり合いから曲げモーメント分布が容易に求められるので、部材の中間に集中外力が載っている例も簡単に解くことができた。しかし同じ第2章でも、中間に集中外力が作用している梁を微分方程式を用いて解く場合には、その中間位置における連続条件を考慮する等、少し面倒な作業になった。その面倒な作業は一般的な不静定梁の場合には避けられなくなる。ただここでは、微分方程式で梁を解くことをまずは学んで欲しいので、その正攻法を説明しておきたい。ところで集中外力モーメントというのはわかり難いかもしれない。例えばいかだのように井桁に組んだ梁（立体骨組）に任意のせん断外力を載せると、直角に交わっている梁同士は、作用反作用でお互いにねじりモーメント力も伝達することになる。このとき、片方の梁にとってのねじりモーメント力は、もう一方の梁にとっては見かけ上の曲げ外力モーメントになる。つまり、片方の梁の曲げモーメントが接合点ではもう一方の梁のねじりモーメントに伝達されている。このような作用をモデル化したのが集中モーメントである。ああー、これでもわかり難いか。

さてここでは、その中間位置を端部境界と同じように、図4.25のような厚さ零の部分²³が支持されるか、あるいはそこに集中的に外力が作用しているものと捉えて、連続条件を求める。この厚さ零の部分の両面はそれぞれ棒の断面であり、そこには断面力が図示した方向を正にして発生している。棒はここで離れたり重なったり、あるいは折れ曲がったりはしないであろうから、最低限変位成分は連続している必要がある。境界条件の幾何学的境界条件の成分と対応させて考えると、その連続条件は

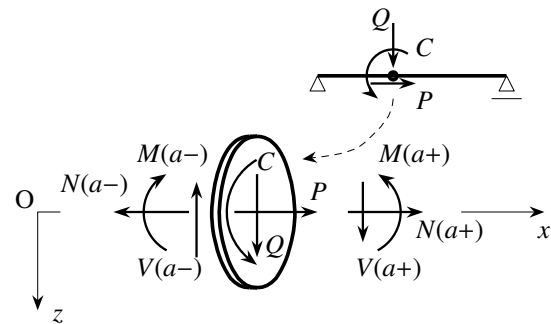


図 4.25 集中外力が作用する点の（不）連続条件

$$u(a-) = u(a+), \quad w(a-) = w(a+), \quad -w'(a-) = -w'(a+) \quad (4.45a, b, c)$$

となることは容易に理解できるだろう。ここに $a-, a+$ というのは点 $x = a$ の直前直後の座標値²³を意味している。一方力の不連続条件については、図の厚さ零の部分の内力と外力のつり合いを考えれば

$$N(a-) - N(a+) = P, \quad V(a-) - V(a+) = Q, \quad M(a-) - M(a+) = C \quad (4.46a, b, c)$$

となることも容易に理解できるだろう。あるいは、載荷点前後で図心が共通していてそこを x 軸が通り、両側共に一様な棒である場合には、式(4.13) (4.18) を用いて上式は

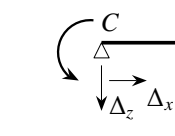
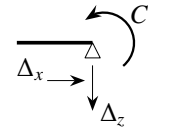
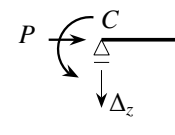
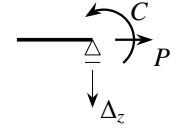
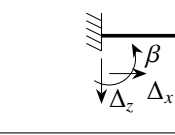
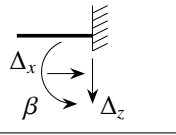
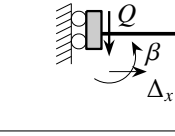
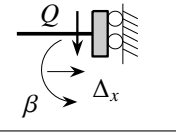
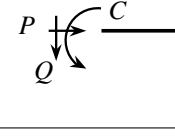
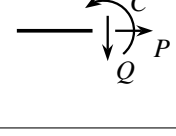
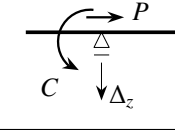
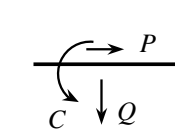
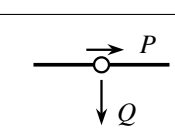
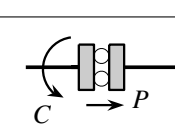
$$(EA u')|_{a-} - (EA u')|_{a+} = P, \quad -(EI w''')|_{a-} + (EI w''')|_{a+} = Q, \quad -(EI w'')|_{a-} + (EI w'')|_{a+} = C \quad (4.47a, b, c)$$

と変位成分で表すことができる。

もしこの中間点がさらに連続した棒の中間支点上である場合には、もちろんその支点反力に相当する Q は未知になるから、上の式(4.47b)を条件として用いることはできない。逆にこの式はその中間支点における支点反力を求めるための式になる。これでは条件が足りなくなるので式(4.47b)に代わる条件が必要になるが、それはその支点が沈下しないという条件である。式(4.45b)はたわみが連続であればいいだけの条件であるから、これ

²³ 元々は $\{a \pm \epsilon; 0 < \epsilon \rightarrow 0\}$ という意味で $a \pm 0$ と書くが、煩雑なので零を省略している。

表 4.1 代表的な境界条件 (Δ_x は支点の強制水平変位, Δ_z は支点沈下変位, β は支点の強制回転角. P, Q, C は集中外力。)

| | | | |
|---|---|--|--|
|  | <p>ヒンジ</p> $u = \Delta_x,$ $w = \Delta_z,$ $-(-EIw'') = C$ |  | <p>ヒンジ</p> $u = \Delta_x,$ $w = \Delta_z,$ $(-EIw'') = C$ |
|  | <p>ヒンジ & ローラー</p> $-(EAu') = P,$ $w = \Delta_z,$ $-(-EIw'') = C$ |  | <p>ヒンジ & ローラー</p> $(EAu') = P,$ $w = \Delta_z,$ $(-EIw'') = C$ |
|  | <p>固定</p> $u = \Delta_x,$ $w = \Delta_z,$ $-w' = \beta$ |  | <p>固定</p> $u = \Delta_x,$ $w = \Delta_z,$ $-w' = \beta$ |
|  | <p>スライダ</p> $u = \Delta_x,$ $-(-EIw''') = Q,$ $-w' = \beta$ |  | <p>スライダ</p> $u = \Delta_x,$ $(-EIw''') = Q,$ $-w' = \beta$ |
|  | <p>自由</p> $-(EAu') = P,$ $-(-EIw''') = Q,$ $-(-EIw'') = C$ |  | <p>自由</p> $(EAu') = P,$ $(-EIw''') = Q,$ $(-EIw'') = C$ |
|  | <p>中間支点</p> $u(a-) = u(a+), \quad \{EAu'(a-)\} - \{EAu'(a+)\} = P,$ $w(a-) = \Delta_z, \quad w(a+) = \Delta_z,$ $-w'(a-) = -w'(a+),$ $\{-EIw''(a-)\} - \{-EIw''(a+)\} = C$ | | |
|  | <p>中間点集中載荷</p> $u(a-) = u(a+), \quad \{EAu'(a-)\} - \{EAu'(a+)\} = P,$ $w(a-) = w(a+),$ $\{-EIw'''(a-)\} - \{-EIw'''(a+)\} = Q,$ $-w'(a-) = -w'(a+),$ $\{-EIw''(a-)\} - \{-EIw''(a+)\} = C$ | | |
|  | <p>中間ヒンジ</p> $u(a-) = u(a+), \quad \{EAu'(a-)\} - \{EAu'(a+)\} = P,$ $w(a-) = w(a+),$ $\{-EIw'''(a-)\} - \{-EIw'''(a+)\} = Q,$ $\{-EIw''(a-)\} = 0, \quad \{-EIw''(a+)\} = 0$ | | |
|  | <p>中間スライダ</p> $u(a-) = u(a+), \quad \{EAu'(a-)\} - \{EAu'(a+)\} = P,$ $-EIw'''(a-) = 0, \quad -EIw'''(a+) = 0,$ $-w'(a-) = -w'(a+),$ $\{-EIw''(a-)\} - \{-EIw''(a+)\} = C$ | | |

にさらにその支点が沈下しない条件を加える必要がある。つまり、その支点が沈下しない条件は

$$w(a-) = 0, \quad w(a+) = 0 \tag{4.48a, b}$$

という二つの条件として認識されなければならない。これで数の上でも必要な連続条件がすべて揃ったことになる。このような連続条件をも含めて、代表的な境界条件を表 4.1 に示した。表では、中間点で支点沈下等が存在する場合に一般化してまとめている。以下、第 4.6 節まではたわみ $w(x)$ だけを未知関数とするいわゆる梁を対象とする。

4.2.2 集中せん断力の作用

(1) 標準的な解法

最初に、図 4.26 にある不静定梁の中央に集中せん断力が作用した場合を考える。境界条件は

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(\ell) = 0, \quad w'(\ell) = 0$$

である。載荷点を除いた部分には分布外力が存在していないから $0 < x < \ell/2, \ell/2 < x < \ell$ のそれぞれの部分のたわみの一般解は

$$w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad 0 < x < \ell/2, \quad w(x) = \bar{a}x^3 + \bar{b}x^2 + \bar{c}x + \bar{d}, \quad \ell/2 < x < \ell \quad (4.49a, b)$$

と表すことができる。これを上の境界条件に代入すると

$$c = 0, \quad d = 0, \quad \bar{b} = -3\bar{a}\ell, \quad \bar{d} = 2\bar{a}\ell^3 - \bar{c}\ell$$

となり、中間的な結果として（この段階で未知数を減らした方が便利なので）

$$w(x) = ax^3 + bx^2, \quad 0 < x < \ell/2, \quad w(x) = \bar{a}(x^3 - 3\ell x^2 + 2\ell^3) + \bar{c}(x - \ell), \quad \ell/2 < x < \ell \quad (4.50a, b)$$

を得る。未定の a, b, \bar{a}, \bar{c} を $x = \ell/2$ における連続条件式 (4.45) (4.47) で決定しよう。まず、たわみとたわみ角は連続しなければならないから、それぞれ式 (4.45b) (4.45c) は

$$\ell^3 a + 2\ell^2 b = 11\ell^3 \bar{a} - 4\ell \bar{c}, \quad 3\ell^2 a + 4\ell b = -9\ell^2 \bar{a} + 4\bar{c}$$

となる。また、 $x = \ell/2$ におけるせん断力と曲げモーメントの不連続条件式 (4.47b) (4.47c) は

$$-6EIa - (-6EI\bar{a}) = Q \rightarrow \bar{a} - a = Q/(6EI), \quad -EI(3\ell a + 2b) - [-EI(-3\ell\bar{a})] = 0 \rightarrow 3\ell a + 2b = -3\ell\bar{a}$$

と書くことができる。以上から四つの未定の積分定数に対する四つの（不）連続条件が

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -11\ell^3 & \ell^3 & 2\ell^2 & 4\ell \\ 9\ell^2 & 3\ell^2 & 4\ell & -4 \\ 3\ell & 3\ell & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} \\ a \\ b \\ \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q/(6EI) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表現できるので、この係数行列の逆行列で必要な 1 列目だけを計算すると

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ a \\ b \\ \bar{c} \end{pmatrix} = -\frac{1}{128\ell^3} \begin{pmatrix} -40\ell^3 & - & - & - \\ 88\ell^3 & - & - & - \\ -72\ell^4 & - & - & - \\ -96\ell^5 & - & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q/(6EI) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{Q}{EI} \begin{pmatrix} -5/96 \\ 11/96 \\ -3\ell/32 \\ -\ell^2/8 \end{pmatrix}$$

と積分定数を決めることができる。

したがって $0 < x < \ell/2$ のたわみは

$$w(x) = \frac{Qx^2}{96EI} (9\ell - 11x)$$

であり、 $\ell/2 < x < \ell$ のたわみは

$$w(x) = \frac{5Q}{96EI} (x - \ell) \left\{ (x - \ell)^2 - 3\ell^2 \right\} + \frac{Q\ell^2}{8EI} (x - \ell)$$

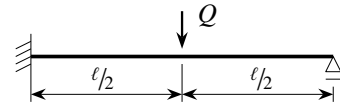


図 4.26 集中せん断力が中央に作用した不静定梁

となる。もし左端からの x 座標に対する右端からの独立変数を新たに

$$\xi \equiv \ell - x \quad (4.51)$$

で定義すると、 $\ell/2 < x < \ell$ のたわみは

$$w(\xi) = \frac{Q\xi}{96EI} (3\ell^2 - 5\xi^2), \quad 0 < \xi < \frac{\ell}{2}$$

とも表現できる。それぞれの微係数を計算すれば曲げモーメントとせん断力の分布も求めることができる。分布外力が無いから曲げモーメント図は連続した折れ線になり、せん断力図は不連続な定数分布を示すはずである。たわみを含めた結果を図 4.27 に示した。

せん断力図と曲げモーメント図の眺め方: ところで、断面力図を直感的に描くときの助けになるように、この図 4.27 を使って、断面力図の見方を書いておこう。まずせん断力図を見ると、スパン中央で上から下方向に Q だけの不連続がある。ここはちょうど Q のせん断力が下向きに作用しているからこうなっているのである。図の向きと力の向きがよく合っている。それを踏まえれば、左端では上向きに $11Q/16$ の不連続が、右端でも上向きに $5Q/16$ の不連続があることから、支点反力が上向きの力として発生したことがわかる。ただしこの文書では、境界条件式 (4.28b) のせん断反力は下向きを正として定義されていたことから

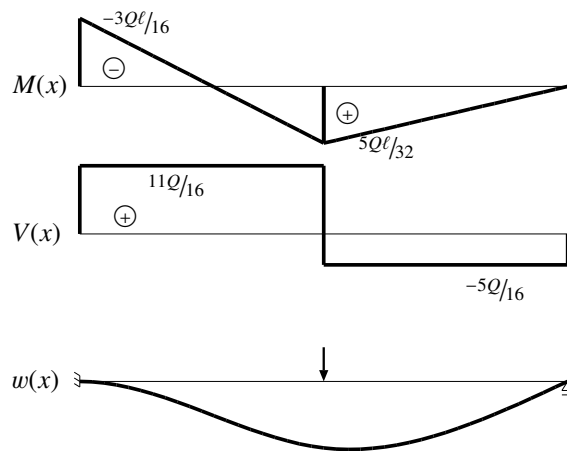


図 4.27 集中せん断力が作用した左端固定右端単純支持の梁

の文書では、境界条件式 (4.28b) のせん断反力は下向きを正として定義されていたことから

$$S_1 = -\frac{11Q}{16}, \quad S_2 = -\frac{5Q}{16}$$

となる。

一方、曲げモーメント図は負を上向きに描いていたが、それは引張側を実際の梁の特徴と対応させるためなのである。例えば鉄筋コンクリート（引張に弱いコンクリートを鉄筋で補強する）でこの図の梁を作ろうとすると、中央では曲げモーメントが下側に分布していることから、鉄筋を梁の下方に配置すればいいことがわかる。これに対し、左端付近では負の曲げモーメントが生じ、図では上側に分布していることから、鉄筋は上方に配置することになる。曲げモーメント図の軸の向きの設定の一つの理由がこの例からわかる。ちょっとだけ面白くありませんか。さて境界条件式 (4.28c) の外力モーメントの正の向きに注意すると、左端の反力モーメントは

$$C_1 = \frac{3Q\ell}{16}$$

となる。

(2) 静定梁の場合

次の例は図 4.28 に示した基本的な単純梁である。境界条件は両端共に

$$w = 0, \quad w'' = 0 \quad (*)$$

と与えられる。この系は静定構造なのでつり合いから曲げモーメント分布を容易に求めることができるので、4階の微分方程式から解き始める必要は無い。力のつり合いから曲げモーメント分布は

$$M(x) = \begin{cases} Qx/2, & 0 < x < \ell/2 \\ Q(\ell-x)/2, & \ell/2 < x < \ell \end{cases}$$

と求められているから、これを式(4.13b)に代入して積分すればいい。つまり

$$w(x) = -Q/6EI(x^3/12 + ax + b) \quad (0 < x < \ell/2), \quad w(x) = -Q/6EI(-x^3/12 + \ell x^2/4 + \bar{a}x + \bar{b}) \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

がその一般解となる。

力のつり合いから曲げモーメント分布を求めたときに既に両端の力学的境界条件を満足しているのだから、上の境界条件式(*)のうちの曲げモーメントが零になる条件 $w'' = 0$ は自動的に満足している。したがって、式(*)の残る幾何学的境界条件 $w = 0$ に上の一般解を代入すると

$$b = 0, \quad \bar{b} = -\ell\bar{a} - \ell^3/6$$

を得る。あとは a と \bar{a} について、載荷点 $x = \ell/2$ におけるたわみとたわみ角の連続条件(4.45b)(4.45c)から求めればよく、それぞれ

$$a + \bar{a} = -\ell^2/4, \quad a - \bar{a} = \ell^2/8 \quad \rightarrow \quad a = -\ell^2/16, \quad \bar{a} = -3\ell^2/16$$

となる。よって $0 < x < \ell/2$ のたわみは

$$w(x) = \frac{Qx}{48EI}(3\ell^2 - 4x^2) \quad (4.52)$$

であり、 $\ell/2 < x < \ell$ のたわみは式(4.51)の ξ を用いると

$$w(\xi) = \frac{Q\xi}{48EI}(3\ell^2 - 4\xi^2)$$

と表現できる。左右対称の系なので、解も左右対称になっているのは当然である。

(3) 左右対称な系

もう一つの例は、図4.29のような両端固定梁の場合である。この場合も左右対称の系であることから解析するのも左半分だけでよく、その場合の境界条件が

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w'(\ell/2) = 0, \quad -EIw'''(\ell/2) = Q/2$$

となることも容易に推測できる²⁴だろう。一般解は3次の多項式(4.49a)と同じ表現になる。これを上の境界条件に代入すると

$$c = 0, \quad d = 0, \quad a = -Q/(12EI), \quad b = Q\ell/(16EI)$$

を得る。

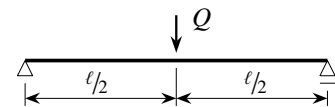


図4.28 中央に集中せん断力の作用した単純梁

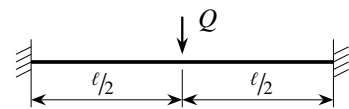


図4.29 集中せん断力が中央に作用した両端固定梁

²⁴ 本当に自信を持って推測できますか? なぜ $w'(\ell/2) = 0$ でいいのでしょうか? 大丈夫ですか?

したがって左半分の領域のたわみは

$$w(x) = \frac{Qx^2}{48EI} (3\ell - 4x)$$

となり、曲げモーメントを求めると

$$M(x) = -EIw''(x) = \frac{Q}{8} (4x - \ell)$$

と線形な分布を示す。モーメント図のみを図4.30に示した。これより両端の反力モーメントは

$$C_1 = \frac{Q\ell}{8}, \quad C_2 = -\frac{Q\ell}{8}$$

となる。

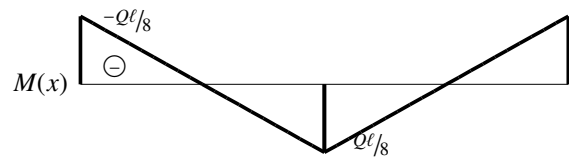


図4.30 中央に集中せん断力を受ける両端固定梁の曲げモーメント分布

(4) 連続梁

いよいよ最後に、図4.31の2径間連続梁を対象にしてみよう。この場合の $x = 0, x = 2\ell$ の境界条件は共に

$$w = 0, \quad w'' = 0$$

でいい。そして中央の連続支承部における連続条件が

$$w(\ell-) = 0, \quad w(\ell+) = 0, \quad w'(\ell-) = w'(\ell+), \quad w''(\ell-) = w''(\ell+)$$

であり、 $x = 3\ell/4$ 点の連続条件は（引数の ' $3\ell/4 \pm$ ' を単に ' \pm ' と略し）

$$w(-) = w(+), \quad w'(-) = w'(+), \quad w''(-) = w''(+), \quad -EIw'''(-) + EIw'''(+)= Q$$

でなければならないから合計12個の条件が存在する。境界条件および連続条件が与えられる点で区分けされた三つのそれぞれの区間の一般解は、まず $0 < x < \ell$ では等分布外力があることから

$$w(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 + q_0x^4/(24EI)$$

となり、右スパンの中央を境にした左右半分ずつの領域では

$$w(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 \quad (\ell < x < 3\ell/2), \quad w(x) = a_3x^3 + b_3x^2 + c_3x + d_3 \quad (3\ell/2 < x < 2\ell)$$

と表される。以上の12個の未定積分定数を上に示した12個の条件式から求めれば、すべての領域の変位を決定できる。その2階の微係数から曲げモーメント分布も求めることができる。しかし12元連立方程式を解くというのはとても現実的な解法とは思えないが、力任せに解こうと思えば解ける正攻法である。せっかく目標にしていた連続梁を対象にしたが面倒なので、後述する別手法による結果を図4.44に示した。

実は、連続梁の解法については第4.3節で用いる重ね合わせの原理を利用した方が簡単であるし、力学的な抵抗の仕方や境界条件の理解の勉強にはなる。ただし、前述の断面力図の眺め方が理解できているかどうか、この連続梁の例に対して計算せずにせん断力図と曲げモーメント図を描き、図4.44と比べておいて欲しい。そして時間があれば、一度でいいから12元連立方程式を自分で解いて、この正攻法がいかに手間がかかるか、そしてどこにも力学的センスが要らないことについても実感しておいて欲しい。そうすれば、後述の重ね合わせの原理や有限要素法による近似解法等の利用のありがたみをさらに感じるができると思う。また重ね合わせの原理の利用では、変形できる物体の抵抗の様子を力学的に洞察する力も必要になるので、この正攻法よりは頭の訓練にはなる。余談ではあるが、大学院入試の構造力学の問題では、こんな微分方程式を用いて解く手法に適した問題は出されないと考えた方がいいのではないだろうか。というのも、その試験は力学的センスを確かめるために実施しているのだから。閑話休題。

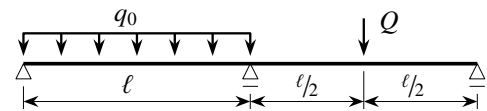


図4.31 連続梁の例

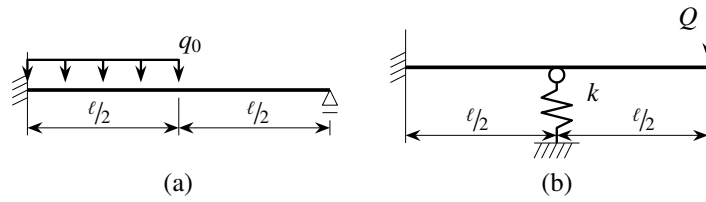


図 4.32 中間連続条件の演習問題

演習問題 4-3

8. 図 4.32 の (a) に示した不静定梁は左半分のみ等に等分布外力が作用している。中央点の連続条件を式 (4.45) (4.47) から誘導し、それを用いてたわみや曲げモーメントを求めよ。
9. 図 4.32 の (b) の片持ち梁は中央点がバネ定数 k の線形バネで支持されている。中央点の連続条件を求め、たわみや曲げモーメントを求めよ。

4.2.3 集中モーメントの作用

(1) 左右対称な系

図 4.33 の両端固定梁の中央に集中モーメントが作用した場合を対象とする。境界条件は両端で

$$w = 0, \quad w' = 0$$

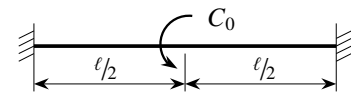


図 4.33 中央に集中モーメントが作用した両端固定梁

である。載荷点を境とする左右の領域で同じく 3 次の多項式で一般解が表されるが、左の領域の場合には、左端の境界条件を代入した式 (4.50a) がその一般解になる。また構造形態が左右対称である（外力条件は対称ではない）ことから、式 (4.51) で定義した右端からの独立変数を用いると、右半分の一般解も同じ表現になる。したがって、変位の一般解は

$$w(x) = ax^3 + bx^2 \quad (0 < x < l/2), \quad w(\xi) = \bar{a}\xi^3 + \bar{b}\xi^2 \quad (l/2 < x < l)$$

となる。

ここで

$$(\cdot)' = -\frac{d}{d\xi}, \quad (\cdot)'' = \frac{d^2}{d\xi^2}, \quad (\cdot)''' = -\frac{d^3}{d\xi^3}$$

であることに注意して載荷点の連続条件を書き表すと、たわみとたわみ角の連続性から

$$l^3 a + 2l^2 b = l^3 \bar{a} + 2l^2 \bar{b}, \quad 3l^2 a + 4lb = -3l^2 \bar{a} - 4l\bar{b}$$

という条件を得る。曲げモーメントの不連続とせん断力の連続条件は

$$\begin{aligned} -EI(3la + 2b) - \{-EI(3l\bar{a} + 2\bar{b})\} &= C_0, \\ -EI(6a) - \{-EI(-6\bar{a})\} &= 0 \end{aligned}$$

と表される。この 4 式から未定積分定数が

$$a = -\bar{a} = -2C_0/(8lEI), \quad b = -\bar{b} = C_0/(8EI)$$

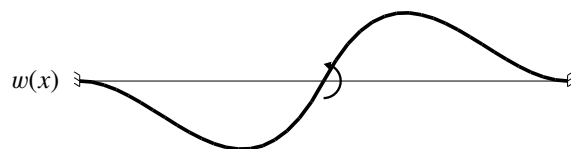
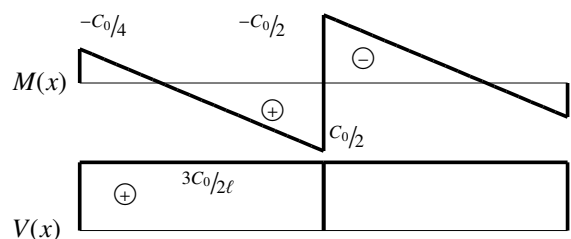


図 4.34 集中モーメントが作用した両端固定梁

と求められる。したがって、たわみが

$$w(x) = \frac{C_0}{8EI\ell} (-2x^3 + \ell x^2) \quad (0 < x < \ell/2), \quad w(\xi) = -\frac{C_0}{8EI\ell} (-2\xi^3 + \ell\xi^2) \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

と反対称形になる。これを微分すれば曲げモーメントとせん断力の分布および支点反力を求めることができる。結果を図4.34に示した。

(2) 静定梁の場合

静定の場合には前の例と同様、曲げモーメント分布を元にたわみを求めればよいから、2階の微分方程式を解けばいい。図4.35の場合には力のつり合いから曲げモーメントが

$$M(x) = \begin{cases} C_0 x/\ell, & 0 < x < \ell/2 \\ C_0(x-\ell)/\ell, & \ell/2 < x < \ell \end{cases}$$

である。幾何学的な境界条件は両端で $w = 0$ になる。上の曲げモーメント分布をそれぞれの区間で積分することによって、一般解が

$$w(x) = -C_0/\ell EI \left(x^3/6 + ax + b \right) \quad (0 < x < \ell/2), \quad w(x) = -C_0/\ell EI \left(x^3/6 - \ell x^2/2 + \bar{a}x + \bar{b} \right) \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

と表現できる。第1式を $x = 0$ の境界条件に、第2式を右端 $x = \ell$ の境界条件に代入すると

$$b = 0, \quad \bar{b} = -\ell\bar{a} + \ell^3/3$$

となる。さらに載荷点のたわみとたわみ角の連続条件に代入すると、それぞれから

$$a - \bar{a} = -\ell^2/2, \quad a + \bar{a} = 5\ell^2/12 \quad \rightarrow \quad a = -\ell^2/24, \quad \bar{a} = 11\ell^2/24$$

と求められる。したがって、たわみが

$$w(x) = \frac{C_0 x}{(24\ell EI)} (\ell^2 - 4x^2) \quad (0 < x < \ell/2)$$

$$w(x) = \frac{-C_0(\ell - x)}{(24\ell EI)} (4x^2 - 8\ell x + 3\ell^2) = \frac{-C_0\xi}{(24\ell EI)} (\ell^2 - 4\xi^2) \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

と、これも反対称形になる。図4.36にはたわみ形状を示した。

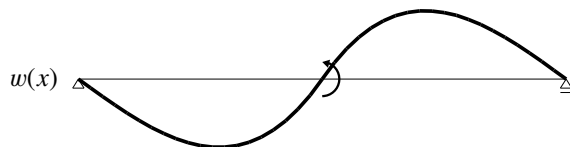


図4.36 集中モーメントが中央に作用した静定梁のたわみ

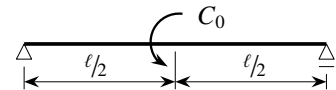


図4.35 集中モーメントが中央に作用した静定梁

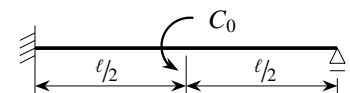


図4.37 不静定梁に集中モーメント

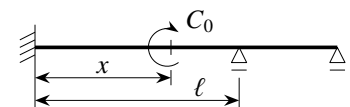


図4.38 右スパンはたわまない

演習問題 4-4

10. 図4.37の梁のたわみを求めて曲げモーメント図を描け。
11. 図4.38の連続梁の右スパンがたわまなかった。あり得ない? 載荷位置 x を求めよ。

4.3 重ね合わせの原理で不静定梁を解く

この節には、実際の現場で応力計算をするために必要な情報を並べつくりは無い。あくまでも物理現象をモデル化したあとの問題解決の方法について、特に線形系の重ね合わせの原理について概説する。つまり、静定梁の解がわかっているものとして、それをういて重ね合わせの原理で不静定構造を解く。基本は、解きたい対象の不静定構造を複数の静定系に切断分解することから始める。そうした上で、その切断箇所に必要な（未知な）不静定反力を作用させることによって元の不静定構造と等価にするための条件を導き出す。この条件は、第2.4.2節の3点で支持された剛棒の例で述べたような、変形も含めた幾何学的な整合性を表す条件に相当する。それを解くことによって不静定反力を求めるのだ。この方法は、前節のように微分方程式を力任せに解くよりも楽に問題解決に導いてくれることが多いが、それが理由でこの節を設けたわけでもない。複数の静定系を重ね合わせて元の不静定構造を復元する際に実は力学的かつ幾何学的な感覚が必要になる。そういう意味で極めて力学的な解法であることから、いくつかの例を示すことにしたわけである。不静定構造の問題に直面したときには、まず検討して欲しい大切な手法の一つである。

不静定梁と静定基本系： 最

初に図4.39にあるような基本的な不静定構造を解いてみる。図示したように、これを二つの静定系の重ね合わせとして考えるアプローチをこの2種類くらいは思い付くのではないだろうか。一つ目の方法の重ね合わせは、左端に発生する不静定

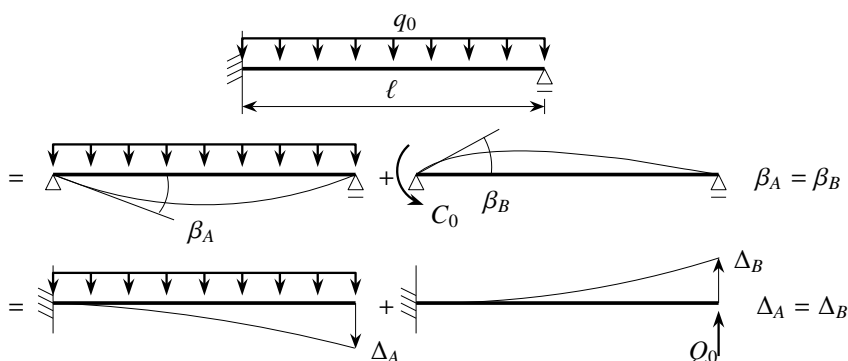


図 4.39 不静定梁を静定梁の重ね合わせで解く

モーメントを未知の C_0 として二つの単純支持梁（静定基本系²⁵）に分解し、その重ね合わせが元の不静定系の境界条件を満足するように C_0 を決める方法である。この C_0 が不静定反力と呼ばれるものに相当する。元に戻す条件としての幾何学的な整合性は、重ね合わせた左端のたわみ角が元の問題のそれ（零）に等しくなるというものだ。つまり、分解した二つの系の左端の正負のたわみ角の等価性 ($\beta_A = \beta_B$) である。一方図4.39の二つ目の方法では右端の支点反力の Q_0 が不静定反力であり、整合性は右端のたわみの等価性 ($\Delta_A = \Delta_B$) である。ここでは一つ目のアプローチを使ってみよう。

左の静定系の左端のたわみ回転角は式(4.36)で求められており、図に示した回転角は

$$\beta_A = w'(0) = \frac{q_0 \ell^3}{24EI}$$

である。一方、右の静定系の左端のたわみ角も式(4.37)で求められており

$$\beta_B = -w'(0) = \frac{C_0 \ell}{3EI}$$

となっている。この二つの系を重ねて元の系に等しくなるためには、左端が固定端であることから、この二つの回転角が等しくなければならない。つまり図にも示したように

$$\beta_A = \beta_B \quad \rightarrow \quad \frac{q_0 \ell^3}{24EI} = \frac{C_0 \ell}{3EI}$$

²⁵ 文献[172]では厳密に基本構や基本系・第 n 系・等価力学系といった名称の構造系を別々に定義しているが、この文書では「等価静定系」としたいところを簡単に「静定系」とした。また英訳は '[released/primary] structure' [179]ではなく 'equivalent system' とした。

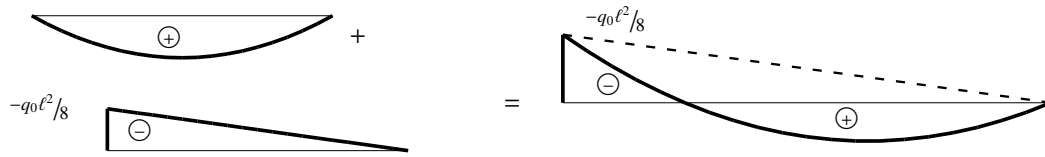


図 4.40 重ね合わせで不静定系を解く例

なるように C_0 を決定すればいい。したがって

$$C_0 = \frac{q_0 l^2}{8}$$

となり、式 (4.33) に一致する。それぞれの静定系の曲げモーメント図も、左の系は2次曲線、右の系は線形とわかっているので、その重ね合わせによって正しい分布図を描くことができる。曲げモーメント図に関してこのようにして重ね合わせたものを図 4.40 に示した。不静定モーメント C_0 を重ね合わせで決めることができたので、たわみやたわみ角の分布も二つの静定系の解の重ね合わせによって算定できる。

両端固定梁の場合： 次の例は図 4.41 の両端固定の場合であるが、この場合もいくつか分解の仕方が考えられる。例えば図示したような三つの静定系の重ね合わせで解けそう。 C_1 と C_2 が未知の不静定反力である。等分布外力が作用した一つ目の梁の場合には、式 (4.36) より

$$\beta_A^{(l)} = w'(0) = \beta_A^{(r)} = -w'(\ell) = \frac{q_0 l^3}{24EI}$$

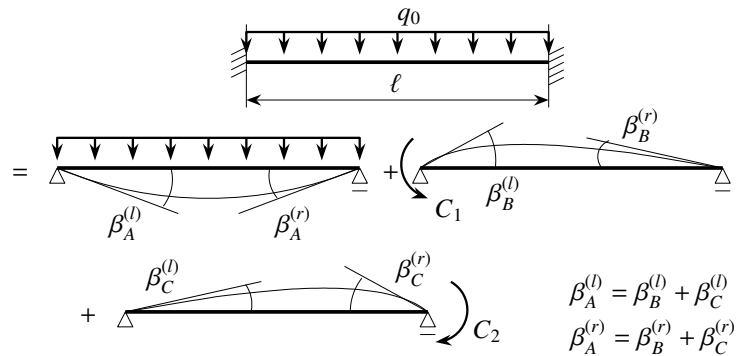


図 4.41 重ね合わせで両端固定梁を解く

である。二つ目の梁の左端に集中曲げ外力モーメントが作用した梁は、式 (4.37) に解があり

$$\beta_B^{(l)} = -w'(0) = \frac{C_1 l}{3EI}, \quad \beta_B^{(r)} = w'(\ell) = \frac{C_1 l}{6EI}$$

となっていた。三つ目の梁の右端に集中曲げ外力モーメントが作用した梁の場合は上の逆であり、これは式 (4.44) の外力の向きを逆にした $C_0 = -C_2$ の場合に相当するから

$$\beta_C^{(l)} = -w'(0) = \frac{C_2 l}{6EI}, \quad \beta_C^{(r)} = w'(\ell) = \frac{C_2 l}{3EI}$$

で与えられる。以上の三つの系を重ね合わせた結果が元の両端固定梁になるためには、重ね合わせた系の両端のたわみ角が零になっていなければならない。つまり

$$\beta_A^{(l)} = \beta_B^{(l)} + \beta_C^{(l)} \rightarrow \frac{q_0 l^3}{24EI} = \frac{C_1 l}{3EI} + \frac{C_2 l}{6EI}, \quad \beta_A^{(r)} = \beta_B^{(r)} + \beta_C^{(r)} \rightarrow \frac{q_0 l^3}{24EI} = \frac{C_1 l}{6EI} + \frac{C_2 l}{3EI}$$

を満足するように C_1, C_2 が決定されればいい。したがって

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = q_0 l^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{q_0 l^2}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と端部の不静定モーメントを得て式 (4.34) に一致する。このようにして重ね合わせた曲げモーメント分布を図 4.42 に示した。二つの不静定モーメント C_1, C_2 が求められたので、たわみやたわみ角の分布も三つの静定系のそれぞれの結果の重ね合わせによって算定できる。

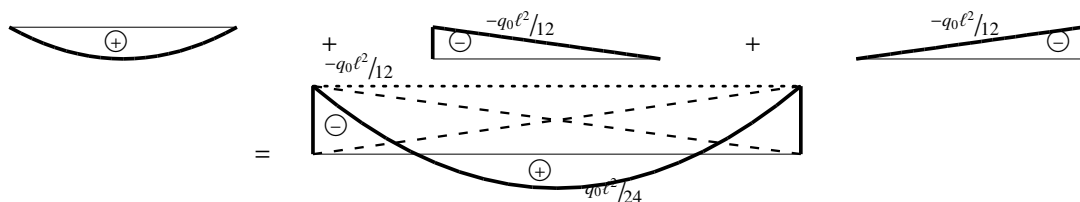


図 4.42 両端固定梁を重ね合わせで解く

連続梁: 次の例は図 4.43 の 2 径間連続梁であるが、微分方程式を用いた正攻法が面倒だったため、その手順のみを示して解くのを諦めた第 4.2.2 (4) 節の例だ。この場合には、例えば図示したような二つの静定系に分けて連続部分でたわみ角を整合させてみよう。この左右のスパンそれぞれでも二つの外力条件に対する解の重ね合わせで答を求めることができる。

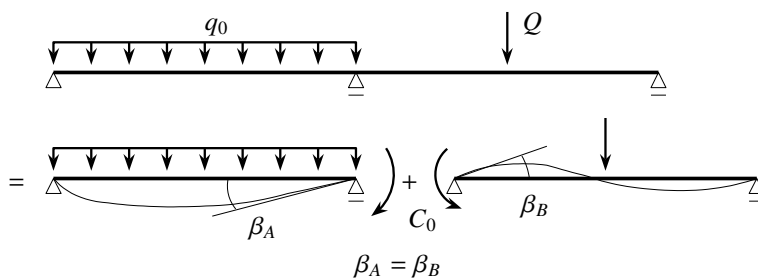


図 4.43 連続梁を重ね合わせで解く例

C_0 が不静定反力である。

左半分の梁の右端の回転角は式 (4.36) と式 (4.44) の重ね合わせで計算することができる

$$\beta_A = \frac{q_0 l^3}{24EI} - \frac{C_0 l}{3EI}$$

となる。一方、右半分の梁の左端の回転角は、式 (4.52) を 1 回微分したものと式 (4.37) から

$$\beta_B = -\frac{Q l^2}{16EI} + \frac{C_0 l}{3EI}$$

を得る。この二つを等置することによって

$$C_0 = \frac{3Ql}{32} + \frac{q_0 l^2}{16}$$

と中間支点上の不静定モーメントを求めることができる。

あとは、この結果をそれぞれのスパンの静定解に代入して曲げモーメント図もたわみ形状も求められる。結果を図 4.44 に示した。

この連続梁の場合も 1 スパンの不静定梁と同様、

中間載荷点および支点部の不静定モーメントが求められさえすれば、モーメント分布は静定系のその重ね合わせによって求められることが明らかになった。したがって、この不静定モーメントを求めることが不静定梁を解く場合の最初の目的と考えてもいいかもしれない。そのためには第 5 章の方法が便利だ。

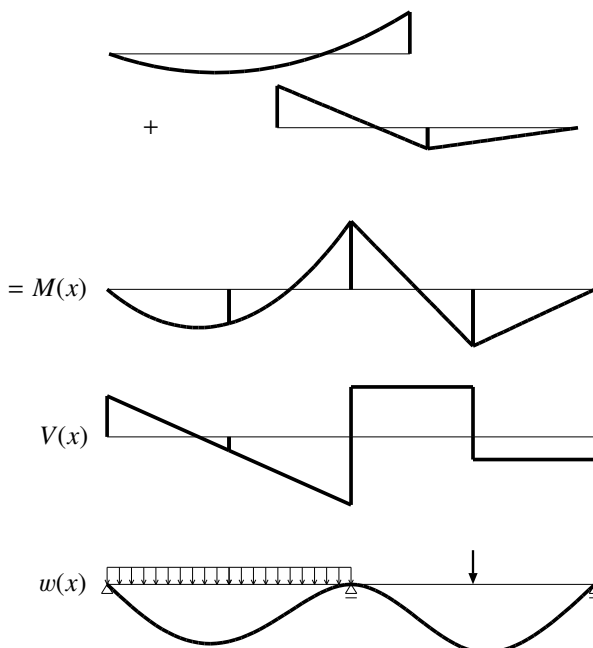


図 4.44 重ね合わせで解く連続梁の曲げモーメント

弾性支持された片持ち梁: 図 4.45 の弾性支持された片持ち梁を重ね合わせの原理で解いてみよう。この場合には、図 4.45 にも示したようにバネの接続点で切断して二つの系に分けて考えると簡単である。X が未知の不

静定反力である。まず切断した梁の先端のたわみを Δ とすると、式 (4.43) と式 (4.39a) の重ね合わせから

$$\Delta = \frac{q_0 \ell^4}{8EI} - \frac{X \ell^3}{3EI}$$

と表すことができる。

一方バネの縮みも Δ であるから

$$X = k \Delta$$

という関係を満足している。この2式から X を消去すると

$$\Delta = \frac{3q_0 \ell^4}{8EI(3 + \alpha_s)}$$

を得て式 (4.41) に一致する。ここでも式 (4.42) のパラメータ α_s を用いた。

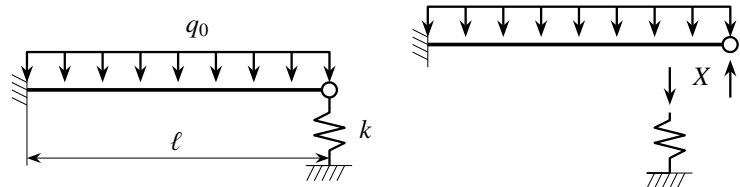


図 4.45 弾性支持された片持ち梁

演習問題 4-5

12. 図 4.39 の二つ目のアプローチで同じ結果を得ることができることを示せ。
13. 演習問題 9 で解いた図 4.32 (b) の系を重ね合わせで解け。
14. 図 4.43 の連続梁を、中央支点の支承をはずす代わりにその反力を不静定反力 X として解け。
15. 図 4.46 の不静定梁の曲げモーメント分布を静定系の重ね合わせで求めよ。二通りのアプローチを考えよ。
16. 図 4.47 の系は、二つの片持ち梁の先端同士を線形バネで結合したものである。これを三つの系に分け、それぞれの梁の先端のたわみを求めよ。
17. 図 4.48 の一番左の図のように、支承を上を設置した断面積 A の円柱形の浮きが密度 ρ の流体に浮いていて、その左側に片持ち梁がある。支承はその片持ち梁の下面から H の位置で静止している。この浮きをちょっと沈めて移動して片持ち梁の右端に設置して手を離れたところ、梁の右端が Δ だけ上方に変位して止まった。そこで、右端の図のように等分布外力 q_0 を梁に載せたところ、梁の右端が Δ だけ下方に変位して元の位置に戻った。 Δ と q_0 を求めよ。

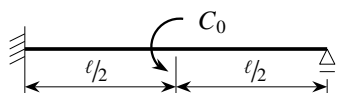


図 4.46 重ね合わせの演習問題

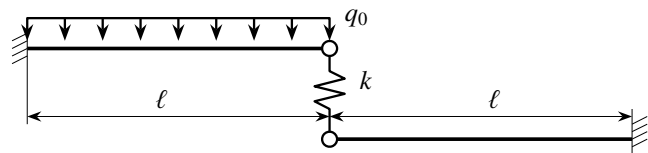


図 4.47 バネ支持された梁の問題

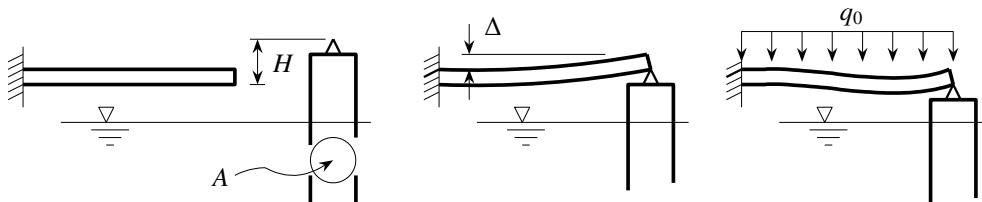


図 4.48 浮きで支持された片持ち梁

4.4 集中外力の数学的表現と単位荷重法

4.4.1 集中外力の分布外力的表現

(1) 集中せん断力の場合

ここではまず、集中外力を分布外力のように扱う手法を概説する。数学です。構造設計で直接使うことは決して無いが、このような扱い方がわかると、構造力学や連続体力学で重要な単位荷重法や影響線・衝撃荷重等の考え方の理解が容易になると同時に、その仕組みの証明等に非常に便利になる。さて、例えば点 $x = a$ に集中外力 Q のみが作用する場合の（不）連続条件は式 (4.47b) の

$$V(a-) - V(a+) = Q \quad \text{つまり} \quad \{-EI w'''(a-)\} - \{-EI w'''(a+)\} = Q$$

であった。もし形式的にこの集中外力を分布外力 $f_c(x; a)$ と表現できたとして、つり合い式 (4.22b) を

$$-EI w''''(x) + f_c(x; a) = 0 \tag{4.53}$$

と表すことができれば、もしかしたら便利かもしれない。ただしそのとき直感的には、分布外力 f_c は点 $x = a$ のごく近傍以外には作用していないことを前提とすべきだろう。そこで、このつり合い式を $x = a$ の近傍だけの $x = a-$ から $x = a+$ まで定積分してみよう。零を積分してもそれは零のままのはずだから、上のせん断力の不連続条件を考慮すると

$$0 = \int_{a-}^{a+} (-EI w''''(x)) dx + \int_{a-}^{a+} f_c dx = \{-EI w'''(a+)\} - \{-EI w'''(a-)\} + \int_{a-}^{a+} f_c dx = -Q + \int_{a-}^{a+} f_c dx$$

を得る。すなわち、この式が f_c の定義だと捉えることによって、集中外力 Q と等価な分布外力表現 $f_c(x; a)$ は

$$\int_{a-}^{a+} f_c(x; a) dx = Q$$

を満足していることになる。これは「集中外力を非常に幅の狭い区間に作用する分布外力として取り扱うことができる」ことを示しており、その「集中外力の大きさはその分布外力の総面積（積分値）に等しい」ことを示している。 $f_c(x; a)$ そのものの定義はできない代わりに、それを積分したものが Q になるという、ちょっと変な定義になってしまっている。

これは例えば図 4.49 のように考えればいい²⁶のかもしれない。というのも、この網掛けした部分の面積は ϵ の大きさにかかわらず（たとえ $\epsilon \rightarrow 0$ でも） Q のままだからだ。また、先に述べたように直感的には f_c は点 $x = a$ 近傍以外では零であろうから、上の定義式の積分範囲は梁の全長まで拡張しても成立する。つまり

$$\int_0^\ell f_c(x; a) dx = Q, \quad 0 < a < \ell \tag{4.54}$$

と書いてもいい。これが集中外力の分布外力的な関数 $f_c(x; a)$ の定義

になる。数学ではこのような関数（本当は超関数） $f_c(x; a)$ を **Dirac** のデルタ関数 $\delta(x; a)$ で表し、この場合は

$$f_c(x; a) = Q \delta(x; a), \quad \int_0^\ell \delta(x; a) dx = 1, \quad 0 < a < \ell \tag{4.55a, b}$$

と表すことができる。したがって、形式的には集中外力 Q が $x = a$ に作用する梁のつり合い式を

$$-EI w''''(x) + Q \delta(x; a) = 0, \quad 0 < x, a < \ell \tag{4.56}$$

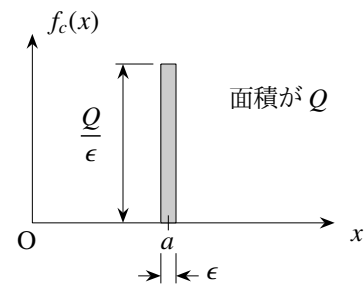


図 4.49 集中外力の模式的表現

²⁶ 数学的な厳密な正当性が気になる読者は超関数や Green 関数の書籍、例えば文献 [88] を読んで欲しい。

と表すこともできるのだ。「形式的」と書いたのは、式(4.55a)(4.56)の等号は「超関数的」なもの(ある関数を両辺に乗じた上で積分した結果同士が等しいというもの)であって通常の等号ではないからである。つまりデルタ関数は次式の定義のように、ある関数との積の積分としてしか意味が無いのである。超関数的な等号の意味については式(10.10)下の説明を参照のこと。なお $Q\delta(x;a)$ が単位長さ当たりの分布外力なので、また式(4.55b)からも明らかなように、 $\delta(x;a)$ の次元は [長さ]⁻¹ だと考えておけばいい。

正確なデルタ関数の定義を最後に示しておく。(無限遠点で零になる、)十分滑らかな任意の関数 $\phi(x)$ (試験関数と呼ばれる)に対し

$$\int_b^c \phi(x) \delta(x;a) dx = \begin{cases} \phi(a) & \text{もし } b < a < c \\ 0 & \text{もし } a < b \text{ あるいは } c < a \end{cases} \quad (4.57)$$

を満足する超関数 $\delta(x;a)$ を **Dirac** のデルタ関数と²⁷呼ぶ。上の式(4.54)は $\phi(x) \equiv Q, b=0, c=\ell$ の場合に相当し、式(4.55b)は $\phi(x) \equiv 1, b=0, c=\ell$ の場合に相当する。

(2) 集中モーメントの場合

次に、例えば $x=a$ 点に集中モーメント C が作用する場合の関数表現を誘導したいが、これはちょっと難しい。まず $x=a$ の(不)連続条件は式(4.47c)の

$$M(a-) - M(a+) = C \quad \text{つまり} \quad \{-EIw''(a-)\} - \{-EIw''(a+)\} = C \quad (*)$$

である。この場合には式(4.53)を直接ではなく²⁸両辺にある程度滑らかな関数 $v(x)$ を乗じた上で $a-$ から $a+$ までの積分を試みる。ただし簡単のために、ここの $v(x)$ は

$$-EIv''''(x) = 0, \quad 0 < x < \ell$$

つまり分布外力の作用していない梁のたわみを用いることとする。この $x=a$ の集中モーメント C を、前節と同様、ある分布関数 $m_c(x;a)$ と表すことを考えよう。まずつり合っているとしているから

$$\int_{a-}^{a+} v(x) \{-EIv''''(x) + m_c(x;a)\} dx = 0$$

を満足する。これは、あとで出てくる仮想仕事の式である。これを4回部分積分し続け、式(*)のたわみの2階微係数 $w''(a)$ の不連続条件と、 v の4階微係数が零であることを考慮すると

$$\int_{a-}^{a+} m_c(x;a) v(x) dx = (-EIw''v') \Big|_{a-}^{a+} = -Cv'(a)$$

となることがわかる。Dirac のデルタ関数と同じく、超関数の性質を数学の書籍から取り出すと

$$\int_0^\ell m_c(x;a) v(x) dx = -Cv'(a), \quad 0 < a < \ell \quad (**)$$

を満足するような超関数 $m_c(x;a)$ は

$$m_c(x;a) = C \frac{d\{\delta(x;a)\}}{dx} = C\delta'(x;a) \quad (4.58)$$

であると書いてある。確かに、式(4.58)を式(**)の左辺に代入して1回部分積分をし、形式的にデルタ関数が $x=a$ 以外では零であることと、デルタ関数の定義を用いれば

$$\int_0^\ell C\delta'(x;a) v(x) dx = C\delta(x;a) v(x) \Big|_0^\ell - \int_0^\ell C\delta(x;a) v'(x) dx = C v'(a)$$

²⁷ このアクションはちょうど、粒径が a (以下) の粒だけをふるい分けたような表現なので、ふるい特性とも呼ばれる [88]。

²⁸ 集中せん断力の場合も関数 $v(x)$ を乗じた上で積分した結果 $\int_0^\ell f_c(x;a) v(x) dx = Qv(a)$ となるので、前節と同じ結論が得られる。

のように式(**)の右辺を得る。もちろんデルタ関数の微係数を図化しようと試みてはいけない。したがって、形式的には集中モーメント C が $x = a$ に作用する梁のつり合い式は

$$-EI w''''(x) + C \delta'(x; a) = 0, \quad 0 < x, a < \ell \tag{4.59}$$

と表すことができる。これはちょっと難しいかもしれない。

ただこのことは、図 4.50 のように考えると直感的な理解ができるかもしれない。つまり ϵ だけ離れた点に大きさが同じで向きが逆の二つの集中外力が作用している場合を考えてみよう。この外力は前節の結論から

$$m_c(x; a) = Q \delta(x; a) - Q \delta(x; a + \epsilon)$$

であり、ここで $\epsilon \rightarrow 0$ とする一方で、この二つの力が作る偶力 $\epsilon \times Q$ を一定 (C) にする制約条件を付けておくと、上式は

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon Q = C, \quad m_c(x; a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon Q) \frac{\delta(x; a) - \delta(x; a + \epsilon)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C \frac{\delta(x; a) - \delta(x; a + \epsilon)}{\epsilon}$$

となる。一方、デルタ関数の作用による解は通常 $(x - a)$ のみの関数となることから、デルタ関数そのものも $\delta(x - a)$ と表示されることが多い。これを上式に代入して $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとると

$$m_c(x; a) = C \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta\{(x - a)\} - \delta\{(x - a) - \epsilon\}}{\epsilon} = C \frac{d\delta(x - a)}{dx}$$

のように式 (4.58) を誘導できる。実はこれは震源モデルとして用い [2] られたりする。

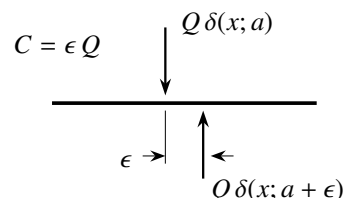


図 4.50 集中モーメントの模式的表現

演習問題 4-6

- 18. 単純梁の中間に集中外力が作用する梁の解を利用し、図 4.50 のように二つの逆向きの集中外力が作用した梁を重ね合わせて解き、上の誘導のように $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとって、それが中間に集中モーメントが作用した単純梁の解になることを示せ。

4.4.2 単位荷重法

(1) 二つの系を考える

前節の集中外力の数学的表現を用いて、便利で面白い手法を紹介しよう。例えば図 4.51 にあるような二つの系 A, B を考える。この図では境界条件も具体的に描いてあるが、しばらくはこれを見ないことにして欲しい。まず解きたい問題の系 A のたわみと曲げモーメントは適切な境界条件の元に

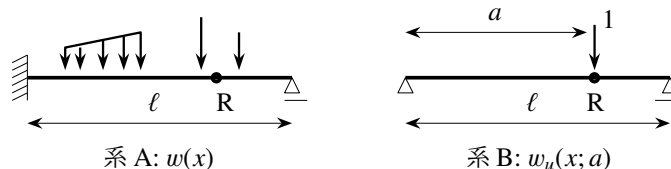


図 4.51 解きたい系 A と、単位荷重が作用した系 B

$$-EI w''''(x) + q(x) = 0, \quad M(x) = -EI w''(x) \tag{a, b}$$

を満足しているものとし、こちらを解きたい問題としておくと、特に点 R のたわみを求めることを目標とする。一方、系 B は系 A と同じである必要は無いが、その点 R だけに単位荷重を載せた系である。载荷点 R の位置 ($x = a$) を明確化するために系 B のたわみを $w_u(x; a)$ と表すことにすると、前節のデルタ関数を用いて

$$-EI w_u''''(x; a) + \delta(x; a) = 0, \quad M_u(x; a) = -EI w_u''(x; a) \tag{c, d}$$

を満足している。こちらでも適切な境界条件を満足しているものとする。なお、前述のように $\delta(x; a)$ は単位長さ当たりの大きさが1の力なので次元は [長さ]⁻¹ となるから、 w_u と M_u の次元もそれぞれ [長さ][力]⁻¹ と [長さ] であることに注意すること。

ここで、系Bのつり合い式(c)に系Aのたわみ $w(x)$ を乗じて全スパンで積分したものが零になることは明らかである。つまり

$$\int_0^{\ell} w(x) \{-EI w_u''''(x; a) + \delta(x; a)\} dx = 0$$

が成立する。この式は第3.5節で導入した仮想仕事式を梁に適用した式の初等的な表現（標準形は式(5.20)）である。敢えてそういった物理的考察は不要ではあるが、仮想仕事の原理が便利な道具であることを以下の梁の問題で理解できることを期待する。ちなみに以下の誘導は第3.5.5節の内容と同じである。さて被積分関数の括弧の中の第2項の積分は、デルタ関数の定義式(4.57)を用いれば系Aの点Rのたわみ $w(a)$ になる。一方第1項については2回部分積分して変形すると、第2項と合わせて上式は

$$\{-EI w w_u''' + EI w' w_u''\} \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} (-EI w'') (-w_u'') dx + w(a) = 0$$

となる。この積分項に式(b)(d)の曲げモーメントを代入して左辺右辺の入れ替えを行うと、最終的に系Aの点Rのたわみ $w(a)$ を

$$w(a) = \int_0^{\ell} \frac{M(x) M_u(x; a)}{EI} dx - [w (-EI w_u''') + (-w') (-EI w_u'')] \Big|_0^{\ell} \quad (4.60)$$

と表現できる。ある点のたわみを求めるこのような方法を単位荷重法と呼ぶ。解きたい問題の曲げモーメント分布と幾何学的境界条件がわかっていると同時に、もし着目している点に単位集中荷重が作用した別の問題の解が求められていれば、モーメント分布を2回積分する代わりに上式で着目点のたわみを求めることができる。構造解析手法という観点からはそれほど有意義な手法とは言いがたいが、第4.8節で例示するように、他の方法よりはどちらかと言えば便利な手法ではあり、さらにその概念自体は諸定理等の理解のためにも気に留めておく価値がある。ちなみに図4.51の例に限定すると、境界条件が

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(\ell) = 0, \quad w''(\ell) = 0, \quad w_u(0) = 0, \quad w_u''(0) = 0, \quad w_u(\ell) = 0, \quad w_u''(\ell) = 0$$

であるから、式(4.60)の境界項はすべて零になって

$$w(a) = \int_0^{\ell} \frac{M(x) M_u(x; a)}{EI} dx$$

となる。これは後述の標準的な単位荷重法と呼ぶものに一致する。

(2) 簡単な例

例えば図4.52の不静定梁の点Rのたわみを求めたい場合に、例えば重ね合わせの原理でモーメント分布が求められていた²⁹としよう。この場合は式(4.32)より

$$M(x) = q_0/8(\ell - x)(-\ell + 4x)$$

である。すべての点のたわみを求めるには、この表現をさらに2回積分して幾何学的境界条件を用いればいいことは既に示した。ここではある1点R ($x = a$) のたわみを単位荷重法で求めてみる。この場合の境界条件は

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(\ell) = 0, \quad -EI w''(\ell) = 0$$

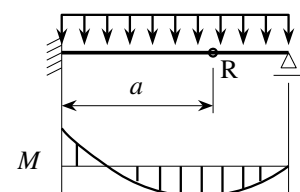


図4.52 単位荷重法の適用例

²⁹ もしそうなら、点Rのたわみは求められているはずだが、ここではそれには目をつぶろう。

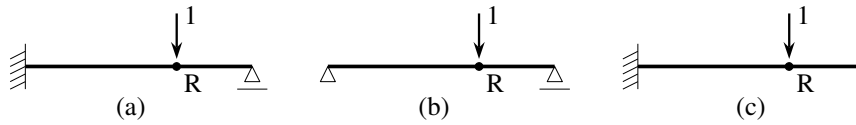


図 4.53 単位荷重を作用させる系 B の例

だから、式 (4.60) の右辺第 2 項はほとんどが零になり、結局

$$w(a) = \int_0^{\ell} \frac{M(x) M_u(x; a)}{EI} dx - \{-w'(\ell)\} \{-EIw''_u(\ell)\}$$

となる。この右辺第 2 項が零になるような系を系 B として選ぶとすると、 $-EIw''_u(\ell) = 0$ でありさえすればいいから、図 4.53 の三つのどれでもいいことがわかる。この中で曲げモーメント分布が一番簡単に求められるのは (c) の片持ち梁の場合なので、それを計算すると

$$M_u(x; a) = \begin{cases} (x - a), & 0 < x < a \\ 0, & a < x < \ell \end{cases}$$

である。この M_u と先に求められた M を上式に代入して計算すると、積分範囲は $0 < x < a$ でいいので

$$w(a) = \int_0^a \frac{q_0}{8EI} (\ell - x)(-\ell + 4x)(x - a) dx = \frac{q_0 a^2}{48EI} (3\ell - 2a)(\ell - a)$$

となる。もちろん、結果の a を x で置き換えたものは任意点 x のたわみの厳密解式 (4.31) に一致³⁰する。この例では敢えて二つの系として別々のものを選んでみたが³¹、その結果はたいへん興味深いと感じてもらえないだろうか。式 (4.60) から明らかなように、境界の項の右辺は、仕事をする組み合わせで

$$(\text{単位荷重法の境界項}) = (\text{解析系の変位の境界条件}) \times (\text{単位荷重系の力の境界条件}) \quad (4.61)$$

になっていることを知っていれば、計算が最も簡単になる単位荷重系 B の選び方がわかるだろう。

(3) 不静定反力を求める例

素直なアプローチ: あるいは逆に、図 4.52 の不静定梁の不静定反力を求めるために単位荷重法を用いる例を示しておこう。まず図 4.54 の (a) ような不静定反力 X を与えて元の不静定梁を解くことを考えてみる。このとき図の (b) の系を用いた単位荷重法で右端のたわみを求め、それが零になる条件から不静定反力 X を求めるというアプローチだ。まず系 (a) の曲げモーメント分布は

$$M(x) = X(\ell - x) - \frac{q_0}{2} (\ell - x)^2$$

であり、系 (b) のそれは上式で X を 1 にして q_0 を無視すればいいから

$$M_u(x; \ell) = (\ell - x)$$

である。これを用いて単位荷重法³¹で右端のたわみを求め

$$w(\ell) = \int_0^{\ell} \frac{M(x) M_u(x; \ell)}{EI} dx = 0 \quad (*)$$

となる条件から X を決めれば元の不静定梁が解けたことになる。上の 2 式を代入して積分することによって

$$\frac{\ell^3}{3} X - \frac{q_0 \ell^4}{8} = 0 \quad \rightarrow \quad X = \frac{3}{8} q_0 \ell$$

と不静定反力が求められ、これは図 4.12 の結果に一致する。

³⁰ 調べてはいないが、こういったことが書いてある教科書はそんなに多くはないのではないだろうか。

³¹ このままだと $w''_u(\ell) = 1/EI \neq 0$ なので式 (4.60) の境界項は無くならないはずだが、後述のように無視していいことはわかっている。

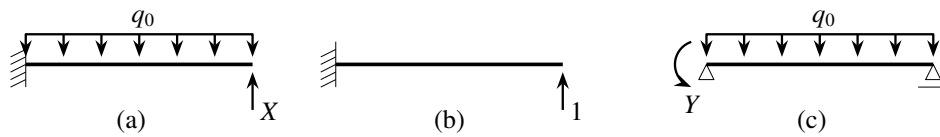


図 4.54 不静定反力を求める二つのアプローチ

ひねくれたアプローチ: 次に, 上と同じ系を図 4.54 の (c) のように, 左端に不静定モーメント Y を与えた単純梁を用いて元の不静定梁を解いてみる。この場合のモーメント分布は

$$M(x) = -Y \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + \frac{q_0}{2} (\ell x - x^2)$$

となる。そして単位荷重をかける系としては前例と同じ片持ち梁を考え, 右端のたわみを零にする条件から Y を求めてみよう。この $M(x)$ と上式の $M_u(x; \ell)$ を上式(*)に代入して積分を実行すると

$$\frac{\ell^2}{3} Y - \frac{q_0 \ell^4}{24} = 0 \quad \rightarrow \quad Y = \frac{q_0 \ell^2}{8}$$

と不静定モーメントが求められ, これも図 4.12 の結果に一致する。うーん, この例には違和感を持たなかっただろうか。 $w(x)$ の系ではそもそも右端のたわみは零になる解になっているにもかかわらず, $w_u(x)$ の系にわざと片持ち梁を用いて, 右端のたわみが零になる条件を用いている。何が何だかわからなくなってもちっとも構わないが面白いでしょ? 左端のたわみ角が零になる条件から不静定モーメントを求める素直なアプローチはこの後の第 4.4.2 (5) 節で説明する。

(4) 標準的な単位荷重法

ここまでは, 系 B が系 A と異なる場合も含めて一般的な定式化をしておいた。しかし多くの教科書類では, 系 B は系 A と同じものを選んでおいた。系 B を系 A と同じにした場合の式 (4.60) の境界項

$$- [w (-EIw''') + (-w') (-EIw'')] \Big|_0^\ell$$

がどうなるか考えてみよう。まず境界でたわみあるいはたわみ角が零の場合はこれはすべて無くなる。しかし, たわみが未知で零ではない場合, 系 B 側のその境界も自由にたわむことができるはずなので, そのせん断力 $(-EIw''')$ は零である。また, たわみ角が未知の場合も同様に, その曲げモーメント $(-EIw'')$ が零になる。したがって, 式 (4.60) の境界項は無くなって単位荷重法は

$$w(a) = \int_0^\ell \frac{M(x) M_u(x; a)}{EI} dx \quad (4.62)$$

でいいことになる。これがたいていの教科書に載っている公式である。ただ, 系 B の選択が少しだけ自由になる公式 (4.60) の方が仮想仕事の汎用的だしカッコいい!

では, たわみを求めたい点 $x = a$ が境界にある場合 (前節で用いた例) はどうなるだろう。ここでは単位せん断力を作用させてたわみを求めようとしているので, そのたわみを求めたい境界では, 上式の境界項が

$$-w(a) \{-EIw'''(a)\} = -w(a) \times 1$$

になると同時に, そもそも式 (c) の第 2 項 $\delta(x; a)$ が無いので, 式 (4.60) は

$$0 = \int_0^\ell \frac{M(x) M_u(x; a)}{EI} dx - w(a)$$

になって, やはりこれは上の式 (4.62) に一致する。

具体的にたわみがどのように求められるのか、まず静定梁を対象にして計算結果を眺めておこう。不静定系における単位荷重法の使い方は、トラスや骨組の代表例を第4.8節にもいくつか列挙したので、それを参考にしながら種々の問題に適用してみたい。さて例えば、図4.28の両端単純支持梁の中央に集中せん断力 Q が作用しているときの中央のたわみを求めるためには、まず曲げモーメントが左半分で

$$M(x) = \frac{Q}{2} x$$

であることから、たわみを求めたい中央点に単位荷重を載せた場合の曲げモーメントも

$$M_u(x; \ell/2) = \frac{1}{2} x$$

である。これを式(4.62)に代入して左右対称なことを利用すれば

$$w(\ell/2) = \frac{2Q}{EI} \int_0^{\ell/2} \frac{1}{2} x \frac{1}{2} x dx = \frac{Q\ell^3}{48EI}$$

を得る。これは式(4.52)から求められる値に一致する。また図4.15の一樣な分布荷重 q が作用した場合の曲げモーメントは

$$M(x) = \frac{q}{2} (\ell x - x^2)$$

である。したがって、中央に単位荷重を作用させた曲げモーメント $M_u(x; \ell/2)$ を用いて、左右対称なことを利用すれば、中央のたわみは

$$w(\ell/2) = \frac{2q}{EI} \int_0^{\ell/2} \frac{1}{2} (\ell x - x^2) \frac{1}{2} x dx = \frac{5q\ell^4}{384EI}$$

と求められる。これも式(4.35)から求められる値に一致する。

念のためにもう一つ、図4.26の不静定梁を図4.55の静定系に置き換えた上で右端に不静定反力 X を作用させ、単位荷重法を用いて解いておこう。まず支点反力は

$$F = Q - X, \quad C = \ell \left(X - \frac{1}{2} Q \right)$$

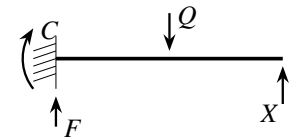


図4.55 右の支点をはずした場合

となるので、曲げモーメントは

$$M(x) = \ell \left(X - \frac{1}{2} Q \right) + (Q - X) x, \quad (0 < x \leq \ell/2), \quad M(x) = (\ell - x) X, \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

と求められる。右端はたわまないで右端のたわみを単位荷重法で求めてそれを零と置こう。そこで、右端に単位荷重を作用させたときの曲げモーメントは、上式で $Q = 0$ と $X = 1$ にすればいいので、全スパンで

$$M_u(x; \ell) = (\ell - x)$$

となる。したがって右端のたわみ Δ_X が零でなければならない条件は、式(4.62)から

$$EI\Delta_X = \int_0^{\ell/2} (\ell - x) \left\{ \ell \left(X - \frac{1}{2} Q \right) + (Q - X) x \right\} dx + \int_{\ell/2}^{\ell} (\ell - x)^2 X dx = 0$$

となり、これが X に対する条件になる。この積分を実行すると

$$X = \frac{5}{16} Q$$

と、正しい不静定反力を得る。これを上の曲げモーメントに代入すれば

$$M(x) = \left(\frac{11}{16} x - \frac{3}{16} \ell \right) Q, \quad (0 < x \leq \ell/2), \quad M(x) = \frac{5}{16} Q (\ell - x), \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

となる。中央のたわみを求めるための単位荷重を作用させた系の曲げモーメントは $Q = 1$ とすればいいので

$$M_u(x; \ell/2) = \left(\frac{11}{16}x - \frac{3}{16}\ell \right), \quad (0 < x \leq \ell/2), \quad M_u(x; \ell/2) = \frac{5}{16}(\ell - x), \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

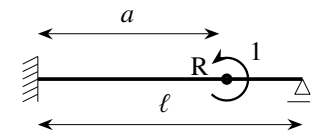
である。再度これを式(4.62)に代入することによって、中央のたわみ Δ_Q が

$$\Delta_Q = \frac{Q}{EI} \left\{ \int_0^{\ell/2} \left(\frac{11}{16}x - \frac{3}{16}\ell \right)^2 dx + \int_{\ell/2}^{\ell} \left(\frac{5}{16} \right)^2 (\ell - x)^2 dx \right\} = \frac{7Q\ell^3}{768EI}$$

と求められる。これも正解である。何だかやっぱり構造力学は積分の練習科目みたいだなあ。

(5) たわみ角と単位荷重法

答を知っているからだが、ある点のたわみ角を求める単位荷重法を誘導しておこう。そこで、図4.51の左側の解きたい系Aの点Rのたわみ角を求めるために、図4.56に示したように点Rに単位の集中モーメントだけを作用させた系Bとの間で仮想仕事式を立ててみよう。系Aは前述の式(a)(b)を満足している。一方系Bのたわみ $w_u^C(x; a)$ と曲げモーメント $M_u^C(x; a)$ は



系B: $w_u^C(x; a)$

図4.56 単位モーメントが作用した系B

$$-EI w_u^{C''''}(x; a) + \delta'(x; a) = 0, \quad M_u^C(x; a) = -EI w_u^{C''}(x; a) \quad (e, f)$$

を満足している。ここでも式(4.58)で表された集中モーメントの表現を用いている。前節と同様、式(e)に系Aのたわみ $w(x)$ を乗じて全スパンで積分したものは零になるので

$$\int_0^{\ell} w(x) \{-EI w_u^{C''''}(x; a) + \delta'(x; a)\} dx = 0$$

が成り立つ。被積分関数の第1項を2回部分積分すると

$$\{-EI w w_u^{C''''} + EI w' w_u^{C'''}\} \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} (-EI w'') (-w_u^{C''}) dx + \int_0^{\ell} w(x) \delta'(x; a) dx = 0$$

を得るが、点Rが境界ではない場合には第1項の境界の項は零になるのは前節で説明した通りである。ここで式(4.58)前後で説明したように、第3項を部分積分して式(4.57)のデルタ関数の定義を用いる(デルタ関数は $x \neq a$ では零と考えていいので)と

$$\int_0^{\ell} w(x) \delta'(x; a) dx = w(x) \delta(x; a) \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} w'(x) \delta(x; a) dx = -w'(a)$$

となるので、さらに上式第2項に式(b)(f)の曲げモーメントを代入すれば

$$\theta(a) = -w'(a) = \int_0^{\ell} (-EI w'') (-w_u^{C''}) dx = \int_0^{\ell} \frac{M(x) M_u^C(x; a)}{EI} dx \quad (4.63)$$

という関係が求められる。これが点 $x = a$ のたわみ角を求める単位荷重法である。また境界のたわみ角を求めたい場合には、前節の説明と同様、式(e)の第2項 $\delta'(x; a)$ が無い代わりに、境界項が

$$-w'(a) \{-EI w_u^{C''}(a)\} = -w'(a) \times 1$$

となるので、やはり上式(4.63)を得る。

そこで、前節で取り上げたのと同じ図 4.26 の不静定梁を、左端のたわみ角を単位荷重法で求めることによって解いてみよう。まず図 4.57 の静定系に置き換えた上で、左端に不静定モーメント X を作用させ、左端のたわみ角を求めてそれを零にしよう。まず支点反力は

$$F_1 = \frac{Q}{2} + \frac{X}{\ell}, \quad F_2 = \frac{Q}{2} - \frac{X}{\ell}$$

となるので、曲げモーメントは

$$M(x) = \left(\frac{Q}{2} + \frac{X}{\ell}\right)x - X, \quad (0 < x \leq \ell/2), \quad M(x) = \left(\frac{Q}{2} - \frac{X}{\ell}\right)(\ell - x), \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

と求められる。そこで左端だけに単位の集中モーメントを作用させた系の曲げモーメントは、上式で $Q = 0$ と $X = 1$ にすればいいので、全スパンで

$$M_u^C(x; 0) = \frac{x}{\ell} - 1$$

となる。したがって左端のたわみ角 Θ_X は式 (4.63) から求めることができ、それは零でなければならないから

$$EI\Theta_X = \int_0^{\ell/2} \left\{ \left(\frac{Q}{2} + \frac{X}{\ell}\right)x - X \right\} \left(\frac{x}{\ell} - 1\right) dx - \frac{1}{\ell} \left(\frac{Q}{2} - \frac{X}{\ell}\right) \int_{\ell/2}^{\ell} (\ell - x)^2 X dx = 0$$

を満足しなければならない。この積分を実行すると

$$X = \frac{3}{16} \ell Q$$

と、正しい不静定反力を得る（のに著者は積分を 3 回間違えた）。これを上の曲げモーメントに代入すれば前節と同じ結果を得る。つまり正解が求められる。骨組の例を第 4.8.3 節にも示しておいた。

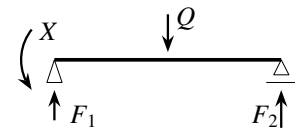


図 4.57 左を回転自由にした場合

4.5 影響線

4.5.1 たわみの影響線

(1) その性質の直感的な確認

トラスや梁を設計するときには、まず断面力の影響線を求めなければ荷重の位置すら決めることができないことを、第 2 章では説明した。つまり、構造設計で最初に必要になる³²のはそういった内力（断面力）の影響線だ。ここではまずたわ

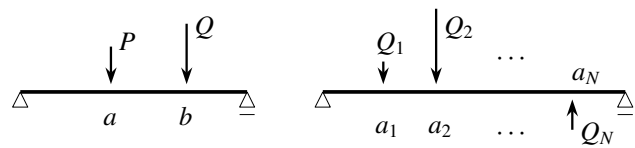


図 4.58 多くの集中外力が作用した梁

みの影響線の説明から始めよう。例えば図 4.51 の系 B のように、ある点 $x = a$ に単位の大きさの集中外力が作用している問題の解を $w_u(x; a)$ と記すことにすると、第 4.3 節で用いた線形系の重ね合わせの原理から、同じ点に大きさ P の集中外力が作用した問題の解が $P w_u(x; a)$ になるのはすぐわかる。さらに、点 $x = b$ にも大きさ Q の集中外力が作用している図 4.58 の左側の図のような場合には、そのたわみが $P w_u(x; a) + Q w_u(x; b)$ になるのも自明であろう。したがって、図 4.58 の右側の図のように、 N 個の点 $x = a_i$, ($i = 1, 2, \dots, N$) に集中外力 Q_i が作用している場合のたわみは

$$w(x) = \sum_{i=1}^N w_u(x; a_i) Q_i$$

でいい。

³² この節は不静定構造が解けるようになったという主旨であるが、これまでの例のように構造の剛性（モーメント曲率関係）がわかっていないと解けなかった。ということは、不静定構造の影響線を求めるには剛性が必要になるが、設計の最初の段階では図面は白紙、つまりその剛性は決まっていない。つまり矛盾がある。現場でどうやっているのかについては知らないが、おおよそ影響線は求めることができるので、それを修正しながら設計しているのだろうか。

ところで第2.2.3(1)節で示した図2.16のように、橋梁に載る自動車等の荷重は分布外力で規定されていたので、次に任意の分布外力 $q(x)$ が作用している場合のある観測点 $x = b$ で発生するたわみを、上の複数の集中外力が並んでいる場合と同じように計算してみよう。この場合は図4.59に示したように、梁の全長を十分大きな数 N を用いて N 等分して、ある点 $x = a_i$ 近傍の分布外力を集中外力で近似して扱ってみよう。図4.49に示したように、集中外力は面積がその大きくなるような非常に短い区間に作用する等分布外力としてもモデル化できたことから、この点 a_i 近傍の集中外力 Q_i は $Q_i \sim \{q(a_i) \Delta a\}$ と置いてもいいだろう。したがって、もし上で使った $w_u(x; a)$ が既知であれば、ある点 $x = b$ のたわみは

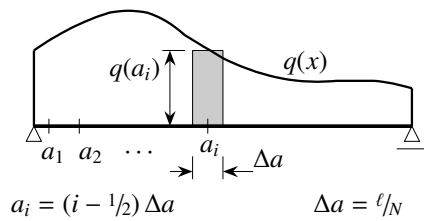


図4.59 影響線の持つ意味の図式的直感的説明

$$w(b) = \sum_{i=1}^N w_u(b; a_i) q(a_i) \Delta a$$

でいいことになる。これに数学的極限としての $N \rightarrow \infty$ を考えると、この総和を積分に置き換えればいだけなので $\left(\sum_{i=1}^N \Delta a \rightarrow \int_0^l da \right)$ という置き換えから結局

$$w(b) = \int_0^l w_u(b; a) q(a) da \tag{4.64}$$

によって点 $x = b$ におけるたわみを求めることができる。このように $w_u(b; a)$ は「载荷点 $x = a$ に作用する単位外力が、観測点 $x = b$ のたわみにどの程度の影響を与えるか」を定量的に示した関数であることから、この観測点 $x = b$ におけるたわみの影響線と呼ばれている。

ある着目点の断面を設計するに当たっては、その断面の応答が一番大きく（不利に）なるような外力の載せ方をまず知る必要があるが、そのような場合に影響線が必要になることは既に述べた。数学では $w_u(x; a)$ のような関数を、対象としている境界値問題の **Green 関数** と呼んでいる。これは材料力学の多くの問題を解析的に、あるいは半解析的に解く場合に重用される概念であり、数値解析手法の一つとしての境界要素法においても（そちらは無限体の基本解ではあるが）非常に重要な概念である。昨今は数値的なシミュレーションが全盛で、解析的な手法や考察およびその教育がないがしろにされているように感じる。しかし、数値シミュレーションは単なるケーススタディに過ぎず、対象としている問題全体が持っている力学的特性を定性的かつ定量的に把握できるとは限らない。そういう観点からこの Green 関数等の特性を考えると、設計という観点から見ても有用なことを多く含んでいるので、以下もちゃんと勉強して欲しい。

(2) 直感的結論の数学的証明

簡単のために単純梁を対象として式(4.64)を証明しておく。ただし一般化して変断面梁を対象とする。解きたい問題は、ある与えられた分布外力の作用した単純梁なので

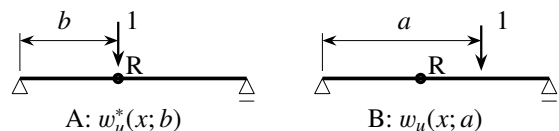


図4.60 単位の集中外力が作用している二つの系

$$\{-EI(x)w''(x)\}'' + q(x) = 0 \tag{a}$$

がつり合い式で、境界条件は

$$w(0) = 0, \quad w''(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad w''(l) = 0 \tag{b}$$

で与えられている。今、この単純梁の $x = b$ の点を観測点 R とし、そこのたわみを求めることにする。まず、図 4.60 の左側の系 A のたわみ $w_u^*(x; b)$ はその観測点 R の方に単位集中荷重を載せた系で

$$\{-EI(x)w_u^{*''}(x; b)\}'' + \delta(x; b) = 0 \quad (c)$$

を満足しており、 $w_u^*(x; b)$ の境界条件は上式 (b) と同じである。これに対し影響線を求める系は、同じく図 4.60 の右側の系 B のように任意の点 $x = a$ に単位集中荷重を載せた系であり、そのたわみ $w_u(x; a)$ も上式 (b) と同じ境界条件の元で

$$\{-EI(x)w_u''(x; a)\}'' + \delta(x; a) = 0 \quad (d)$$

を満足している。この $x = b$ における関数 $w_u(b; a)$ が観測点 R のたわみの影響線である。ちなみに系 A は系 B の随伴系と呼ばれている。

ここで、単位荷重法の誘導と同じように式 (c) に求めたい解 $w(x)$ を乗じて全領域で積分し（仮想仕事を算定し）、デルタ関数の定義を用いると

$$0 = \int_0^\ell \left[\{-EI(x)w_u^{*''}(x; b)\}'' + \delta(x; b) \right] w(x) dx = \int_0^\ell \{-EI(x)w_u^{*''}(x; b)\}'' w(x) dx + w(b)$$

となる。さらに、右辺第 1 項を移項して次の式の形にし、それを 4 回部分積分すると

$$\begin{aligned} w(b) &= \int_0^\ell \{EI(x)w_u^{*''}(x; b)\}'' w(x) dx \\ &= \left[-(-EIw_u^{*''})' w + (-EIw_u^{*''}) w \right]_0^\ell + \left[-w_u^{*'} (-EIw'') + w_u^* (-EIw'')' \right]_0^\ell - \int_0^\ell w_u^* \left[\{-EI(x)w''\}'' \right] dx \end{aligned}$$

を得る。これに境界条件を代入すれば右辺第 1, 2 項の境界の値はすべて零になり、第 3 項の被積分関数の鉤括弧内は式 (a) より $-q(x)$ なので

$$w(b) = \int_0^\ell w_u^*(x; b) q(x) dx \quad (e)$$

となる。この式は式 (4.64) に非常によく似ているが、まだちょっとだけ違うよ。

そこで今度は、式 (c) に影響線 $w_u(x; a)$ を乗じて全領域で積分すると、同様に

$$0 = \int_0^\ell \left[\{-EI(x)w_u^{*''}(x; b)\}'' + \delta(x; b) \right] w_u(x; a) dx = \int_0^\ell \{-EI(x)w_u^{*''}(x; b)\}'' w_u(x; a) dx + w(b; a)$$

となるので、これも上の誘導と同様 4 回部分積分して式 (d) を代入したあと境界条件を考慮すると最終的に

$$0 = - \int_0^\ell w_u^*(x; b) \delta(x; a) dx + w(b; a) \quad \rightarrow \quad w_u^*(a; b) = w_u(b; a) \quad (4.65)$$

を得る。この関係は自己随伴系で成立するもので、ちょっと面白い。つまり図 4.60 を見ながらだとわかり易いと思うが、「ある構造の、ある載荷点に単位荷重を載せたときに別のある観測点で観測されたたわみは、逆に、その観測点に単位荷重を載せて観測される元の載荷点のたわみに等しくなる」ということである。この関係を **Maxwell** の相反定理と呼び、弾性体の式 (3.144) と同じである。最後に、上式 (4.65) の記号 a を x で置き換えた上で式 (e) の右辺の被積分関数中の $w_u^*(x; b)$ を $w_u(b; x)$ で置き換えると

$$w(b) = \int_0^\ell w_u(b; x) q(x) dx$$

となり、果たして式 (4.64) が証明された。

ちなみに、図 4.60 の荷重を一般化し、系 A には P^* が作用してたわみ $w^*(x; b)$ が生じ、系 B には P が作用してたわみ $w(x; a)$ が生じたとすると、上述と同様の演算から式 (4.65) の代わりに

$$P^* w(b; a) = P w^*(a; b) \quad \text{つまり式 (4.65) は} \quad \frac{w(b; a)}{P} = \frac{w^*(a; b)}{P^*} \quad (4.66a, b)$$

を得る。これは **Betti** の相反定理と呼ばれ、弾性体の式 (3.143) と同じである。相反定理の誘導や証明にはエネルギー等の物理的解釈（自己随伴系にしか使えないし、そもそも本末転倒の間違った誘導・証明だ）は要らない。

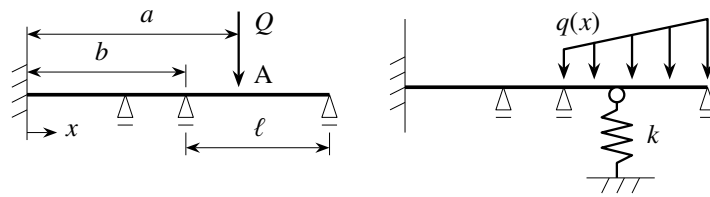


図 4.61 相反定理と影響線の利用例

演習問題 4-7

19. 図 4.61 の左側の図にある系のある点 A に集中外力 Q が作用した場合の任意点のたわみ $w_Q(x)$ が求められて (測定されて) いるものとする。そこで右側の図のように同じ点 A にバネ定数 k の線形バネを挿入し、そのスパンに分布外力 $q(x)$ を作用させたとき、バネの縮み量が

$$\frac{\int_b^{b+l} q(x) w_Q(x) dx}{Q + k w_Q(a)}$$

になることを示せ。相反定理と影響線の考え方を用いると簡単だ。

4.5.2 曲げモーメントとせん断力の影響線

前述のように橋梁の断面設計においてはまず曲げモーメントとせん断力の影響線を求める必要がある。この曲げモーメントとせん断力の影響線も、たわみの影響線と同じように定義できる。つまり、単位荷重を点 $x = a$ に作用させたときの $x = b$ に設定した設計断面 B の曲げモーメント $M_u(b; a)$ が求められれば、それを曲げモーメントの影響線と呼ぶ。この曲げモーメントの影響線がわかっているならば、ある任意の分布外力 $q(x)$ が作用したときの設計断面の曲げモーメントは、式 (4.64) のたわみの場合と同様に

$$M(b) = \int_0^l M_u(b; a) q(a) da \tag{4.67}$$

によって求められる。

一つだけ簡単な例を解いておこう。図 4.62 には片持ち梁の点 B の曲げモーメントの影響線を示した。求めてみよう。まず $0 < x < b$ に単位荷重が載った場合には点 B より右には何も荷重が載っていないので、点 B で仮想的に切断したその右の部分のモーメントのつり合いから

$$M_u(b; x) + 0 = 0 \quad \rightarrow \quad M_u(b; x) = 0$$

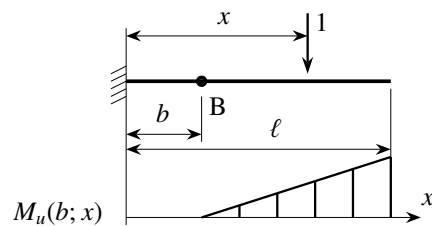


図 4.62 片持ち梁の曲げモーメントの影響線

となる。次に $b < x < l$ の単位荷重がある場合には、同じ部分のモーメントのつり合いは

$$M_u(b; x) + (x - b) \times 1 = 0 \quad \rightarrow \quad M_u(b; x) = b - x$$

と求められる。まとめると

$$M_u(b; x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < b \\ b - x, & b < x < l \end{cases} \tag{4.68}$$

となる。すなわち設計断面 B に対しては、もし外力がそれよりも左側 ($0 < x < b$) に作用する限り何の影響も受けない。それに反して、設計断面より右側に作用する外力から受ける影響は設計断面から離れれば離れるほど

大きくなり、片持ち梁先端で最大になる。ということは、この設計断面を危険にしようと思えばできるだけ先端側に大きな外力を載せればよいことがわかる。まさに直感と一致する。ちなみにせん断力の影響線も同様に求めることができ

$$V_u(b; x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < b \\ 1, & b < x < \ell \end{cases} \quad (4.69)$$

となる。この場合も設計断面より右側に外力を載せることが危険側になる。外力の方が移動する影響線の求め方は場合分けが必要になり面倒だが、意外と教科書等にその演習問題は多くないので、読者は自発的に練習しておくのが望ましい。

4.5.3 梁の設計 — 最大曲げモーメントと最大せん断力

設計の段階では、外力のパターン $q(x)$ が図 2.16 のように示方書で規定されている³³ので、前節で求めた影響線を用いることによって、着目している設計断面を最も危険にするような外力の分布を決定できる。そして、その最も危険な外力に対して生じる曲げモーメントを最大曲げモーメント M_{MAX} と呼んでいる。つまり、その載荷位置を $s_i < x < e_i$, ($i = 1, 2, \dots, N$) とすると

$$M_{\text{MAX}}(\text{設計断面 B}) \equiv \max_{s_i, e_i} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{s_i}^{e_i} M_u(b; x) q(x) dx \right\} \quad (4.70)$$

のような最大値が得られるように載荷位置 s_i と e_i を探し出し、それで得られる左辺の値を最大曲げモーメントと呼ぶのである。このような外力の載せ方を影響線載荷と呼んでいる。すなわち上の片持ち梁の例では、集中外力の場合なら先端に、ある幅を持った等分布外力の場合もできるだけ先端付近に載せたときに設計断面 B は最も不利になり、その曲げモーメントが最大曲げモーメントである。ただし一般的に、ある断面には正負の曲げモーメントが生じるので、式 (4.70) の被積分関数中の M_u に、正だけの影響線 M_u^+ の箇所か、負だけの影響線 M_u^- の箇所のいずれかをそれぞれ用いて、求められた正負の最大曲げモーメント M_{MAX}^{\pm} に対して安全を確保する必要がある。同様に、設計断面のせん断力の影響線を用いれば最大せん断力 V_{MAX} が算定できる。つまり

$$V_{\text{MAX}}(\text{設計断面 B}) \equiv \max_{\bar{s}_i, \bar{e}_i} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\bar{s}_i}^{\bar{e}_i} V_u(b; x) q(x) dx \right\} \quad (4.71)$$

となるが、この載荷位置 \bar{s}_i と \bar{e}_i は最大曲げモーメントを得る載荷位置の s_i と e_i とは異なるので注意して欲しい。最大せん断力の場合は符号は関係なく、 $|V_{\text{MAX}}^{\pm}|$ のうちの大きい方を V_{MAX} と考えればよい。

このようにして最大の断面力が求められたあと、例えば曲げに対する設計の場合は求められた最大曲げモーメント M_{MAX} を式 (4.16) に代入して、最外縁応力 $\sigma_{\text{max}}(x)|_{\alpha}$, ($\alpha = \text{U, L}$) を

$$\sigma_{\text{max}}^{\alpha} = \frac{M_{\text{MAX}}}{W_{\alpha}}$$

と算定する。例えば正の最大曲げモーメント ($M_{\text{MAX}}^+ > 0$) に対しては、断面の上端の $\sigma_{\text{max}}^{\text{U}}$ は負（圧縮）だから

$$|\sigma_{\text{max}}^{\text{U}}| = \frac{M_{\text{MAX}}^+}{|W_{\text{U}}|} \leq \sigma_a^{(bc)} \quad \rightarrow \quad |W_{\text{U}}| \geq \frac{M_{\text{MAX}}^+}{\sigma_a^{(bc)}} \quad (4.72)$$

になるように、曲げ圧縮強度 $\sigma_a^{(bc)}$ を用いて断面の設計をすればよいことになる。同時に、断面の下端の $\sigma_{\text{max}}^{\text{L}}$ は正（引張）だから

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{L}} = \frac{M_{\text{MAX}}^+}{W_{\text{L}}} \leq \sigma_a^{(bt)} \quad \rightarrow \quad W_{\text{L}} \geq \frac{M_{\text{MAX}}^+}{\sigma_a^{(bt)}} \quad (4.73)$$

³³ 本当はちょっと違うが、正確な情報は第 J.5.3 節を参照のこと。

を満足するように、曲げ引張強度 $\sigma_a^{(bt)}$ を用いて断面を設計すればいい。同じ検討を負の最大曲げモーメント ($M_{\text{MAX}}^- < 0$: 負の最大値) に対して行くと、今度は下端が圧縮になるので

$$|\sigma_{\text{max}}^L| = \frac{|M_{\text{MAX}}^-|}{W_L} \leq \sigma_a^{(bc)} \quad \rightarrow \quad W_L \geq \frac{|M_{\text{MAX}}^-|}{\sigma_a^{(bc)}} \quad (4.74)$$

であり、上端の引張側では

$$\sigma_{\text{max}}^U = \frac{|M_{\text{MAX}}^-|}{W_U} \leq \sigma_a^{(bt)} \quad \rightarrow \quad |W_U| \geq \frac{|M_{\text{MAX}}^-|}{\sigma_a^{(bt)}} \quad (4.75)$$

となる。以上の4式を満足するように断面係数 W_U と W_L を設計すれば安全性を確認したことになる。この引張と圧縮の2種類の強度については第7.7.3節の式(7.99)(7.102)を参照のこと。最大せん断力に対する設計の考え方は第2.3.4(3)節の式(2.12)に述べた通りなので、ここでは説明を省略する。具体的な計算例については第2.2.3(3)節や第2.3.4(2)節および第J.5.3節を参照のこと。

演習問題 4-8

20. 長さ ℓ の単純支持梁の、曲げモーメントの影響線 $M_u(b; x)$ とせん断力の影響線 $V_u(b; x)$ が

$$M_u(b; x) = \begin{cases} \frac{x(\ell - b)}{\ell} & 0 < x < b \\ \frac{b(\ell - x)}{\ell} & b < x < \ell \end{cases}, \quad V_u(b; x) = \begin{cases} -\frac{x}{\ell} & 0 < x < b \\ \frac{\ell - x}{\ell} & b < x < \ell \end{cases} \quad (4.76a, b)$$

となることを示し、例えば幅 $c < \ell$ の等分布外力を作用させる場合には、どこに配置したときに $x = b$ に設定した設計断面にとって最も危険になるのかを求めよ。それを元に、その断面の最大曲げモーメントと最大せん断力を求めよ。

4.5.4 不静定梁の影響線

(1) 相反定理を利用した手法

さて不静定構造の場合は、外力の作用箇所が与えられた場合であっても曲げモーメント等を求めるのは面倒だったが、その影響線となるとさらなる場合分けが必要になってもっと手間がかかりそうだ。ただし、例えば図4.63の問題の解 $w_u(x; a)$ が任意の x と a に対して求められさえすれば、その $w_u(x; a)$ の微係数を求めて $x = b$ を代入することによって

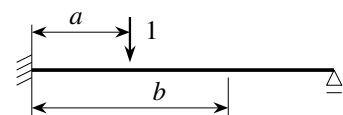


図 4.63 不静定梁の影響線

$$\theta_u(b; a) = -w'_u(x; a)|_{x=b}, \quad M_u(b; a) = -EI w''_u(x; a)|_{x=b}, \quad V_u(b; a) = -EI w'''_u(x; a)|_{x=b} \quad (*)$$

のようにたわみ角や曲げモーメント・せん断力の影響線を求めることはできる。しかしそのためには任意の点 x におけるたわみの影響線 $w_u(x; a)$ を求めないといけないので、あまり合理的なアプローチとは思えない。ところで、ある種の試験では五択問題を瞬時に解く能力を要求されることがある（というのが、以下の定理を紹介する本当の理由ではないのだが・・・否、本当の理由というのがそもそも無いのだが・・・呵呵）。そこで、不静定構造の影響線がどのような分布になるのかを直感的に知るための便利な方法を概説する。それは **Müller-Breslau** の定理と呼ばれている。物理的な観点からではなく、仮想仕事の原理やデルタ関数および相反定理の有意義な使い方³⁴として、とても面白い。

³⁴ 共役梁を用いた Mohr の定理 (p.254) に比べれば、数理解物理的な方法であり、頭の体操にもなると思う。

たわみの影響線: たわみの影響線が、影響線を求めたい点に単位荷重を作用させたときのたわみであることは、式(4.65)のMaxwellの相反定理が不静定系でも成立することから簡単に予想できる。証明は相反定理のそれと同じなので省略するが、図4.64のたわみを $w_u^*(x; b)$ とすると、元の問題のたわみの影響線は

$$w_u(b; a) = w_u^*(a; b) \tag{4.77}$$

として求められる。

たわみ角の影響線: たわみ角の影響線を求めたい場合には、図4.65のように観測点 $x = b$ に集中単位外力モーメントを作用させた場合のたわみ $w_u^*(x; b)$ を考えてみよう。式(4.58)で示したように集中外力モーメントはデルタ関数の1階の微係数で表現できた。したがって、 $w_u^*(x; b)$ が満足すべきつり合い式は

$$-EI w_u^{*''''}(x; b) + \delta'(x; b) = 0$$

となる。一方前述のように、たわみの影響線 $w_u(x; a)$ が満足すべきつり合い式は等断面梁の場合は

$$-EI w_u''''(x; a) + \delta(x; a) = 0 \tag{**}$$

であるから上式に $w_u(x; a)$ を乗じて全領域積分すると

$$0 = \int_0^l \{-EI w_u^{*''''}(x; b) + \delta'(x; b)\} w_u(x; a) dx = \int_0^l \{-EI w_u''''(x; a)\} w_u^*(x; b) dx - w_u'(b; a)$$

を得る。ただしここでは、被積分関数の第1項は4回部分積分して境界条件を考慮し、第2項も1回部分積分してデルタ関数の定義を用いた。右辺の被積分関数の括弧の中は上式(**)から $-\delta(x; a)$ でなければならない。したがってデルタ関数の定義を用いると上式は

$$0 = -w_u^*(a; b) - w_u'(b; a) \rightarrow -w_u'(b; a) = \theta_u(b; a) = w_u^*(a; b) \tag{4.78}$$

となる。すなわち、影響線を計算したい点に単位の集中曲げ外力モーメントを作用させたときのたわみ形状 w_u^* が、求めたいたわみ角 $\theta_u = -w_u'$ の影響線になる。

曲げモーメントの影響線: 次に曲げモーメントの影響線については、観測点にヒンジを挿入してそのたわみ角が単体量、つまり1だけ不連続になるようにする問題(図4.66)を解いて考えてみよう。この場合には

$$-w_u^{*'}(b+; b) - \{-w_u^{*'}(b-; b)\} = 1 \tag{a}$$

となるので、これは

$$\int_{b-}^{b+} w_u^{*''}(x; b) dx = -1$$

と書いてもいいことは容易に確かめられる。ということは、図のような1だけたわみ角に不連続がある場合のたわみはデルタ関数を用いて

$$w_u^{*''}(x; b) = -\delta(x; b)$$

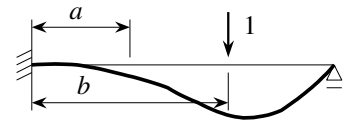


図4.64 不静定梁のたわみの影響線と相反定理

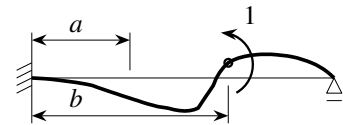


図4.65 不静定梁のたわみ角の影響線 (下向き正)

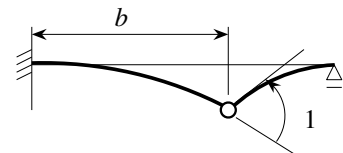


図4.66 不静定梁の曲げモーメントの影響線 (右側は誇張した)

という関係に置き換えられる。これをさらに2回微分すると等価なつり合い式の表現として

$$-EI w_u''''(x; b) - EI \delta''(x; b) = 0$$

を $w_u^*(x; b)$ は満足していることになる。曲げモーメントの場合と同様にこの式に $w_u(x; a)$ を乗じて全領域積分し、部分積分したあと境界条件を考慮して整理すると

$$0 = \int_0^\ell \{-EI w_u''''(x; a) w_u^*(x; b) - EI w_u''(x; a) \delta(x; b)\} dx$$

となるので、再度式(**)を代入して、さらに式(*)から $-EI w_u''''(x; a)$ を $M_u(x; a)$ に置き換えると結局

$$0 = \int_0^\ell \{-\delta(x; a) w_u^*(x; b) + M_u(x; a) \delta(x; b)\} dx \rightarrow M_u(b; a) = w_u^*(a; b) \tag{4.79}$$

という関係が求められる。すなわち図4.66のように、観測したい点にヒンジを挿入してたわみ角が1だけ不連続になるようにたわませたときのたわみ形状 w_u^* がその点の曲げモーメントの影響線 M_u に一致する。実際にその値を計算するのは面倒ではあるが、分布の様子は比較的容易に想像できる。

せん断力の影響線：せん断力の影響線の場合は図4.67のように、観測点にスライダを挿入してその点でたわみが1だけ不連続になるようにしたときのたわみ形状を求めれば、それがせん断力の影響線になる。この場合は

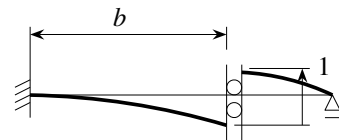


図4.67 不静定梁のせん断力の影響線 (右側は誇張した)

$$-w_u^*(b+; b) - \{-w_u^*(b-; b)\} = 1 \rightarrow w_u^*(x; b) = -\delta(x; b) \tag{b}$$

とすればいいので、曲げモーメントの場合と同じように演算すると、式(b)と等価なつり合い式

$$-EI w_u''''(x; b) - EI \delta'''(x; b) = 0$$

を $w_u^*(x; b)$ は満足するから、 $w_u(x; a)$ との積の積分からの若干の計算のあと

$$0 = \int_0^\ell \{-EI w_u''''(x; a) w_u^*(x; b) + EI w_u'''(x; a) \delta(x; b)\} dx$$

を得る。そこで式(*)から $-EI w_u'''(x; a)$ を $V_u(x; a)$ に置き換えて、さらに式(**)を代入すると

$$0 = \int_0^\ell \{-\delta(x; a) w_u^*(x; b) - V_u(x; a) \delta(x; b)\} dx \rightarrow V_u(b; a) = -w_u^*(a; b) \tag{4.80}$$

となる。つまり、たわみ(の負の値)に1だけの不連続がある場合のたわみ形状 $-w_u^*$ がその点のせん断力の影響線 V_u に一致する。正しい影響線を図4.68に示したので上の四つのスケッチと比較して欲しい。

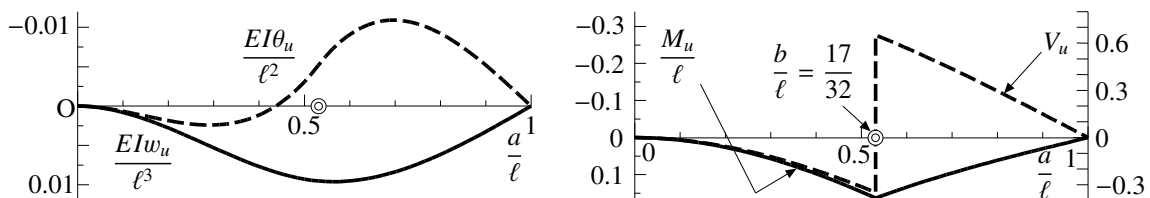


図4.68 片端固定片端単純支持梁の $b = 17/32 \ell$ の断面の影響線

実際に静定な片持ち梁と単純支持梁³⁵における曲げモーメントとせん断力の影響線の式(4.68)(4.69)(4.76b)を示したのが図4.69である。曲げモーメントは下向きが正、せん断力は上向きが正である。この図をなんらか

³⁵ 単純支持梁の曲げモーメントの影響線図は、設計断面に集中せん断力が作用したときのモーメント図に似ているので注意すること。

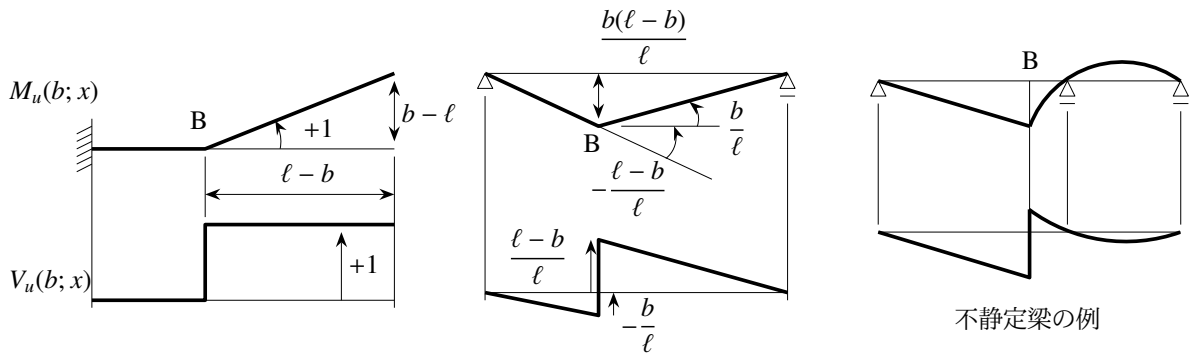


図 4.69 曲げモーメントとせん断力の影響線と Müller-Breslau の定理

の梁のたわみ図であるように捉えた上で負のたわみ角と負のたわみの点 B の不連続量を求めると、それぞれ

片持ち梁: 負のたわみ角の不連続量 = $+1 - 0 = 1$, 負のたわみの不連続量 = $+1 - 0 = 1$
 単純支持梁: 負のたわみ角の不連続量 = $\frac{b}{l} - \left(-\frac{l-b}{l}\right) = 1$, 負のたわみの不連続量 = $\frac{l-b}{l} - \left(-\frac{b}{l}\right) = 1$

となることから、上式 (a) (b) が確かめられる。つまり設計断面にヒンジを挿入した上で、その負のたわみ角の差が 1 になるように強制的に変位させた状態のたわみ図が曲げモーメント（下向きが正）の影響線になる。また設計断面にスライダを挿入した上で、その負のたわみの差が 1 になるように強制的に変位させた状態のたわみ図がせん断力（上向きが正）の影響線になる。図 4.69 の一番右にもう一つの非静定梁の例を示したが、これは計算しないで描いたものである。呵呵。

(2) 重ね合わせによる曲げモーメントの影響線の誘導

前節の方法は影響線の概略を知るためには便利だが、数値そのものを求めるにはやはり重ね合わせの原理等を用いてきちんと解いた方が簡単で確実かもしれない。そこで、その重ね合わせの原理を用いて図 4.66 の曲げモーメントの影響線を求めてみよう。まず右端の支点を取り除いて片持ち梁の静定系を考える。この静定系の $x = b$ の点 B の曲げモーメントの影響線 $\bar{M}_u(b; x)$ は式 (4.68) の右辺および図 4.62 に示した通りである。そこで元の系に戻すための不静定反力 X を右端に作用させた系を設定すればいいので、図 4.70 の下の図のように、右端に単位荷重が作用したときの点 $x = b$ の曲げモーメントを M_b とすることによって、元の系の点 B の曲げモーメントの影響線は

$$M(b; x) = \bar{M}_u(b; x) + X M_b$$

のように一旦は表示できるだろう。また M_b の方が $M_b = l - b$ になるのは簡単にわかるはずだ。

あとは不静定反力 X を求めればいい。そのためには、同じく図 4.70 の左上の図のように任意点に単位荷重が載ったときの右端のたわみ Δ_x が求められていれば、それと不静定反力によるたわみを重ね合わせたたわみが右端で零になる条件から、その X を求めることができる。つまり

$$X \delta = \Delta_x \quad \rightarrow \quad X = \Delta_x / \delta$$

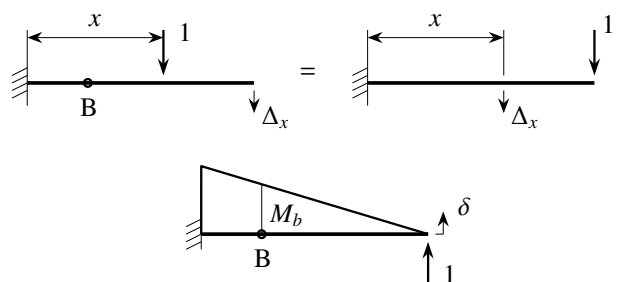


図 4.70 影響線を重ね合わせの原理で求める

のようになる。ここに δ は図 4.70 の下の図の先端のたわみで、式 (4.39a) から $\delta = l^3 / (3EI)$ である。ところで同じ図の左側の系の Δ_x がその右側の系の Δ_x に等しいことは、Maxwell の相反定理から明らかである。した

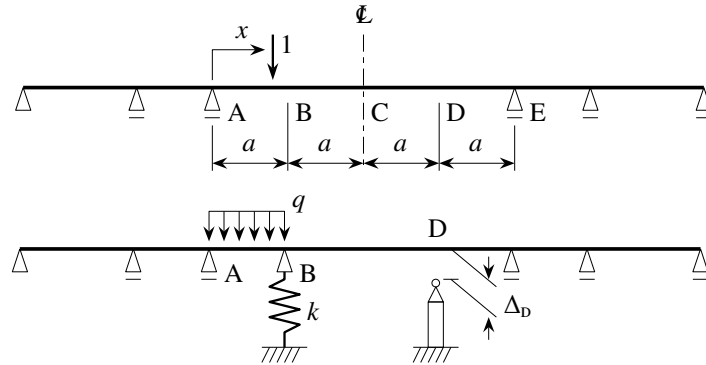
がって式(4.38)から $\Delta_x = \frac{3\ell x^2 - x^3}{6EI}$ となるので、上式から X を求めることができ、結局、曲げモーメントの影響線は

$$M(b; x) = \bar{M}_u(b; x) + \frac{1}{2\ell^3} (3\ell x^2 - x^3)(\ell - b) \quad (\star)$$

と求められる。

演習問題 4-9

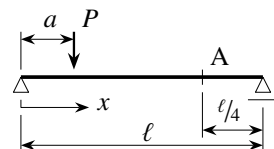
21. Müller-Breslau の定理を用いて、重ね合わせで求めた上式(★)を導け。結構たいへんな計算である。
22. 図 4.31 のような、等断面等スパンの 2 径間連続梁において、片方のスパン中央断面の曲げモーメントの影響線を、重ね合わせの原理および Müller-Breslau の定理で求めよ。
23. 次の図は、材料および構造が中央スパンの中央の点 C の断面を含む面に対して左右対称な連続梁である。この中央スパンの点 A から点 E の間の任意の点に単位荷重を載せた場合の点 B のたわみ $v_B(x)$ 、つまり点 B のたわみの影響線が求められているものとする。ただし $0 < x < 4a$ である。



- (1) $0 < x < 4a$ の範囲に限定し、点 D のたわみの影響線 $v_D(x)$ を求めよ。
- (2) この中央スパンの保守のために、図のように梁の点 B と点 D の位置に支保工を設けることにし、その支保工の安全性を確認することにした。ただし、点 B に設けた支保工は柔だったので、線形バネ定数 k の弾性支持でモデル化した。また点 D に設けた支保工は十分剛ではあったが、荷重を載せる前には梁との間に $\Delta_D > 0$ のギャップが発生していた。この支保工を設置した構造の梁の点 A と点 B の間に保守のための機材を置くことにするのだが、ここでは簡単のためにそれが等分布荷重 $q \geq 0$ になるものとして、それを徐々に増やしていったところ、 q が q_1 に達したときに梁の点 D が支保工に触れた。
 - a) $q < q_1$ の場合の、点 B と点 D のたわみ w_B と w_D を求めよ。
 - b) 点 D が支保工に触れるときの荷重 q_1 を求めよ。
 - c) $q > q_1$ の場合の点 D の反力 R_D 、つまりその支保工が支えなければならない力 R_D を求めよ。

24. 長さ ℓ で曲げ剛性 EI を持つ一様断面の単純支持梁を考える。その梁に、右図のように、 $x = a$ ($0 < a < \ell$) の位置に集中荷重 P が作用したときの、 $a \leq x < \ell$ のたわみ $w(x)$ は

$$w(x) = \frac{Pal^2}{6EI} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\} \left(\frac{\ell - x}{\ell} \right) - \left(\frac{\ell - x}{\ell} \right)^3 \right]$$



のように求められている。以下

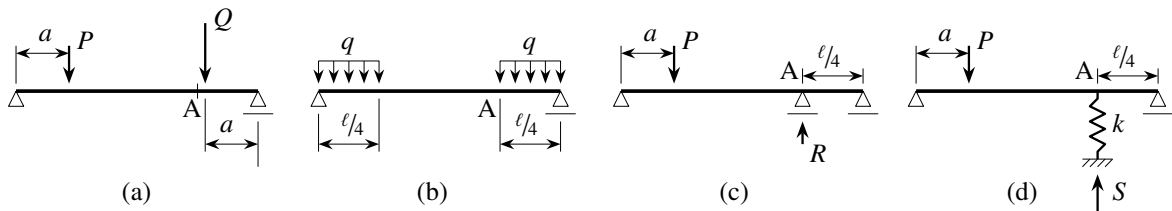
$$0 < a \leq \frac{\ell}{4}$$

とし、点 A とは $\left(x = \frac{3\ell}{4}\right)$ の位置を指すものとする。

- (1) 図 (a) のように、 $x = a$ の位置に集中荷重 P が作用し、 $x = \ell - a$ の位置に集中荷重 Q が作用したときの、点 A のたわみを求めよ。上の式を利用してもいい。
- (2) 図 (b) のように左右端から $\ell/4$ の領域に等分布荷重 q を載せた。このときの点 A のたわみを求めよ。
- (3) 図 (c) のように、点 A を単純支持に変更し、集中荷重 P を $x = a$ の位置に置いた。このときの点 A の支点反力 R を求めよ。
- (4) 図 (d) のように、ばね定数が k の線形ばねで点 A を弾性支持した上で、集中荷重 P を $x = a$ の位置に置いた。このときの点 A の支点反力 S を求めよ。ただし、ばね定数 k は

$$k = \frac{256EI}{13\ell^3}$$

で与えられるものとする。



さて、最後の問題については、読者は以下の解答例を読まずに自力で解いて欲しい。

- (1) P によるたわみは、公式に $x = 3\ell/4$ を代入するだけなので、荷重が左にあることを添え字にして

$$w_l = w\left(\frac{3\ell}{4}\right) = \frac{Pal^2}{6EI} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \right\} \frac{1}{4} - \frac{1}{64} \right] = \frac{Pal^2}{384EI} \left\{ 15 - 16\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \right\} = \frac{P}{384EI} (15a\ell^2 - 16a^3)$$

また Q が右から a の位置にあった場合の $x = 3\ell/4$ のたわみ w_r は、左右対称なことから

$$w_r = w\left(\frac{\ell}{4}\right) = \frac{Qal^2}{6EI} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \right\} \frac{3}{4} - \frac{27}{64} \right] = \frac{Qal^2}{384EI} \left\{ 21 - 48\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \right\} = \frac{Q}{384EI} (21a\ell^2 - 48a^3)$$

になるので、その両者の和 w_i は

$$w_i = w_l + w_r = \frac{P}{384EI} (15a\ell^2 - 16a^3) + \frac{Q}{128EI} (7a\ell^2 - 16a^3)$$

となる。

- (2) 前問の $P = 1, Q = 1$ のときの w_i が影響線なので

$$w_i = \frac{1}{384EI} (36a\ell^2 - 64a^3)$$

であり、したがって分布外力に対するたわみは

$$w = \frac{q}{384EI} \int_0^{\ell/4} (36a\ell^2 - 64a^3) da = \frac{17q\ell^4}{16 \times 384EI} = \frac{17q\ell^4}{6144EI}$$

となる。

- (3) 支点反力 $-R$ による $x = 3\ell/4$ のたわみ w_R は、問題用紙の公式に $x = 3\ell/4$ と $a = 3\ell/4$ を代入すればいいから、問題 (1) の w_l に $a = 3\ell/4$ を代入して

$$w_R = \frac{-R\ell^2}{384EI} \frac{3\ell}{4} \left\{ 15 - 16\frac{9}{16} \right\} = -\frac{3R\ell^3}{256EI} \quad \text{あるいは} \quad = -\frac{R\ell^3}{384EI} \frac{9}{2}$$

となる。支点になる条件は

$$w_l + w_R = 0 \quad \text{あるいは} \quad Pa\ell^2 \left\{ 15 - 16 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\} = R\ell^3 \frac{9}{2}$$

だから

$$R = \frac{256EI}{3\ell^3} \frac{Pa\ell^2}{384EI} \left\{ 15 - 16 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\} = \frac{2P}{9} \left(\frac{a}{\ell} \right) \left\{ 15 - 16 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\}$$

となる。

- (4) 支点反力 S によるたわみは問題 (3) の w_R の R を S にすればいい。それを w_S と書くことにすると、支点のばねの抵抗条件は

$$S = k(w_l + w_S)$$

となる。つまり

$$\frac{S}{k} = \frac{Pa\ell^2}{384EI} \left\{ 15 - 16 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\} - \frac{3S\ell^3}{256EI}$$

が成り立たなければならないから

$$\left(\frac{3\ell^3}{256EI} + \frac{1}{k} \right) S = \frac{Pa\ell^2}{384EI} \left\{ 15 - 16 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\}$$

に k の表現 $\left(\frac{1}{k} = \frac{13\ell^3}{256EI} \right)$ を代入すれば

$$\frac{16\ell^3}{256EI} S = \frac{Pa\ell^2}{384EI} \left\{ 15 - 16 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\} \quad \rightarrow \quad S = \frac{Pa}{24\ell} \left\{ 15 - 16 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\}$$

と求められる。

といったところで愚痴を書いておく。この演習問題 24 番はある試験に出したもので、解答例でもわかるように重ね合わせの原理だけで解ける。それができるように公式が問題で与えてあるのである。しかし 20 名程の受験者の半数程がこの公式を使わず、わざわざ曲げモーメントを求めて（それだけで時間が無くなる）単位荷重法あるいは次の章で紹介する Castigliano の第 2 定理を使う。もう時間は無いし積分は間違うしである。まず (1) は単に x に位置を代入するだけなのにそれすらできない人が数名。公式を無視して曲げモーメントを別途求めて積分した人が数名。また公式は用いたものの左右対称等の幾何学的な特徴が理解できない人が数名。(2) が影響線の問題だとわかった人はたったの 2 割。またぞろ曲げモーメントを求める。しかも、公式を無理やり使おうとして分布荷重を集中荷重に置き換えるといった無茶ぶりも数名あった。そして (3) と (4) は、ほぼ三分の一が曲げモーメントを再度求めて単位荷重法等の積分をして時間を浪費し、そして計算間違いをした。線形系の基本は重ね合わせである。上では便利だと書いたのだが、単位荷重法のような積分公式だけをなぜ覚えようとするのだろう。積分公式は決して安全な手段とは限らないよ。ちなみに演習問題 23 番で各径間の寸法や境界条件を曖昧なままにしてあるのは、その積分という手段を使えないようにするためだ。

4.6 梁のせん断応力・せん断変形

4.6.1 初等梁理論の枠組内のせん断応力

(1) 断面に発生したせん断力をつくるせん断応力

前から順にここにたどり着いた読者の多くはもう忘れていていると思うが、梁の断面にはせん断力が生じるにもかかわらず、初等梁理論はそれに対応するせん断変形は無いという仮定に基づいて定式化されているので、せ

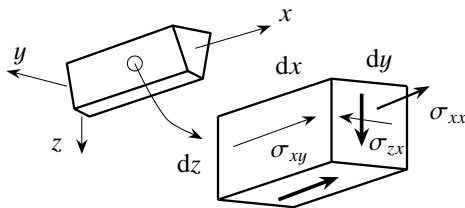


図 4.71 梁の中に発生するせん断応力

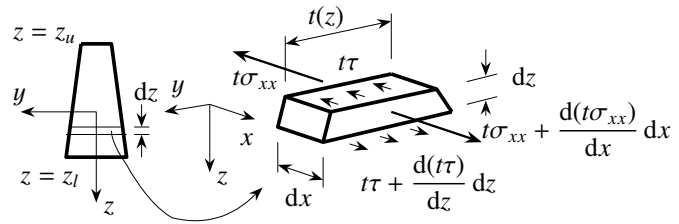


図 4.72 z-x 面内曲げを受ける梁のせん断応力 σ_{zx}

せん断応力も生じない。しかし、その理論で得られる直応力 σ_{xx} の精度はとてもいいことがわかっている。そもそも断面にはせん断力 $V(x)$ という抵抗力が生じないとつり合わないことから、梁の内部にせん断応力も発生しているのは明らかである。そのため、例えばプレートガーダのウェブ板自体やウェブとフランジの接合部等の安全性の確認には、このせん断応力分布も求めておく必要があるはずだ。

ではどうしたらいいだろう。一番確実なのは、梁理論を諦めて連続体として曲げ部材の挙動を解くことだろう。しかし接合部の溶接部を設計するためだけにそのような3次元の計算をすることはあまり現実的ではない。幸い我々が求めた梁理論による曲げ理論の直応力 σ_{xx} の精度はかなりいいので、それに対応するせん断応力を求めれば、直応力と同じくらいの精度になるかもしれない。構造力学で我々が抛りどころにしているのももちろん力のつり合いだ。したがって、この直応力につり合うようなせん断応力を求めるというのはどうだろう。それは多分、工学的に許容できる第1次近似としての精度を持つせん断応力になる可能性が十分期待できる。そこで第3章の連続体の力学にちょっとだけ戻って、梁理論で求められた直応力につり合うせん断応力を求めてみよう。そのとき図4.71に示したように梁の内部の微分体積要素を取り出すと、直応力 σ_{xx} とつり合うべきせん断応力成分は σ_{zx} , σ_{zy} の二つである。ただ z-x 面内の曲げ問題で生じるせん断力 $V(x)$ は z 方向の力であり、それに対応するのは図に太い矢印で示した σ_{zx} の方である。また I 形断面のプレートガーダを思い浮かべると、そのウェブ部は y 方向の肉厚が非常に薄いため、 σ_{zy} の大きさが σ_{zx} の大きさより有意になるとは考え難い。したがって梁理論で次に重要な応力成分は σ_{zx} の方だと考え、しばらくの間は σ_{zy} を無視する。

z-x 面内の曲げ問題であることを考えると、y 方向（肉厚 $t(z)$ の方向）の応力分布を厳密に取り扱う必要はないだろうから、次の図4.72では y 方向に全幅 $t(z)$ をとり、 $t(z) \times dx \times dz$ の微分要素の局所的な力のつり合いを考えても構わないだろう。そういった意味で近似的なせん断応力を扱っていることから、以下 σ_{zx} の代わりに τ という記号を用いる。こうすると式(3.22)に対応する x 方向の力のつり合いは

$$\frac{\partial(t\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(t\tau)}{\partial z} + t\bar{p}_x = 0, \quad t\bar{p}_x \equiv \int_y p_x dy$$

となる。ここに p_x は x 方向の単位体積当たりの分布外力で、 \bar{p}_x はその y 方向の平均である。図心を通るように x 軸を配置させたときの梁理論の範囲内の直応力は式(4.14b)で算定されているから、これを上式に代入して左辺第1,3項を右辺に移すと

$$\frac{\partial(t\tau)}{\partial z} = -t(z) \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} - t\bar{p}_x = -t(z) \left(\frac{1}{A} \frac{dN}{dx} + \frac{z}{I} \frac{dM}{dx} + \bar{p}_x \right)$$

とも表現できる。これに梁理論のつり合い式(4.18)(4.20)を代入して整理すると

$$\frac{\partial(t\tau)}{\partial z} = -\frac{t(z)zV(x)}{I} - t(z) \left(\bar{p}_x - \frac{1}{A} \int_A p_x dA \right), \quad \left[\because \frac{dN}{dx} = -p \equiv - \int_A p_x dA \right] \quad (*)$$

となる。右辺の最後の項は体積力の y 方向平均と全断面平均との差であり、第1次近似としては無視していい。

上式(*)を、断面の上面 $z = z_u$ から z 方向の任意の位置まで積分すると

$$t(z) \tau(x, z) - t(z_u) \tau(x, z_u) = -\frac{V(x)}{I} \int_{z_u}^z t(\xi) \xi d\xi \quad (4.81)$$

という関係を得る。ξはzに関する積分のための補助変数である。すなわちz = z_uのせん断応力がわかれば、梁理論で求められるせん断力と断面形状を用いて断面内のせん断応力分布を計算できるようになった。通常、梁の上面には直接外力が作用することが無いと考えていい³⁶ため、梁の上面はせん断応力に関しては自由表面である。したがって上式(4.81)の左辺第2項は零となり、最終的に断面内のせん断応力分布は

$$\tau(x, z) = -\frac{V(x)G_z(z)}{t(z)I} \tag{4.82}$$

となる。ここに

$$G_z(z) \equiv \int_{z_u}^z t(\xi)\xi d\xi \tag{4.83}$$

で定義された関数G_z(z)は断面1次関数と呼ばれる。この積分を断面の下端(z → z_l)まで実行すると、t(ξ)dξ = dAであることに気が付けば

$$G_z(z_l) = \int_{z_u}^{z_l} \xi t(\xi) d\xi = \int_A z dA = J_z = 0$$

となる。つまり、全断面積分したものが断面1次モーメントに一致することがG_z(z)の名前の由来である。ここではx軸が図心を通るようにしているため、断面下端z = z_lの自由表面でもせん断応力が零になることを確認できた。なおV = -EIw'''なので、せん断応力τと変形(-w''')の間関係にはせん断弾性係数Gは関与せず、Young率Eが見かけ上の材料係数になっているが、これは直応力につり合う条件からせん断応力を誘導したからである。せん断弾性係数が材料係数になる素直な改良モデルは第4.6.3節で説明する。ただし、式(4.82)のモデルの精度が悪いわけでは決していない。

では図4.73の左側に示した矩形断面を例にとり、せん断応力分布を求めてみよう。断面1次関数は

$$G_z(z) = \int_{-h/2}^z t\xi d\xi = \frac{t}{2} \left\{ z^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\}$$

となり、I = th³/12であるから

$$\tau = -\frac{6V(x)}{th^3} \left\{ z^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\}$$

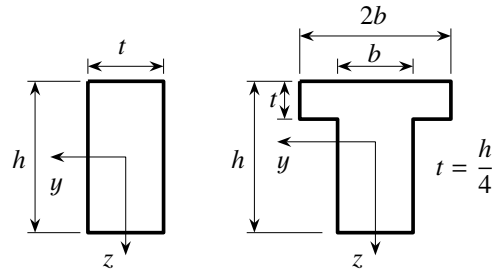


図4.73 矩形断面とT形断面

を得る。これは図4.74に示したように断面中央z = 0で最大になるような放物線分布であり、第3.6.4(3)節の例で求めた応力分布式(3.199b)と同じ形になっている。そしてその最大値は上式よりz = 0で求められ

$$\tau_{\max} = \tau(z = 0) = \frac{3V(x)}{2th} = \frac{3}{2}\tau_{\text{ave}}$$

となる。最後の式のτ_{ave}はせん断力を断面積(th)で単純に除した平均せん断応力である。念のために放物線分布の平均値を算定してみると確かに

$$\bar{\tau} \equiv \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \tau(z) dz = \frac{6V}{th^4} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) dz = \frac{V}{th} = \tau_{\text{ave}}$$

になっている。

(2) 曲げを受けた梁内部の主応力方向

求められたせん断応力分布を直応力と一緒に示したのが図4.74である。軸力が作用せず純粋に曲げのみが発生している場合には、この図のようにx方向の直応力が図心で零になる三角形分布をし、それにつり合うように求めた第1次近似としてのせん断応力分布はx軸上で最大値をとるような放物線分布をする。なおz方向の直応力については、少なくとも構造力学としての梁理論の範囲内の第1次近似では零と考えていいだろう。

³⁶ トラスやアーチのように横桁から荷重を受ける場合はそれでいいが、プレートガーダの場合は厳密にはそうならない。ただ、床版との合成作用が無視できると考えてそのように近似するのだろう。

せん断応力は断面の上下面の自由表面では零になっているから、図 4.74 に示したように上下面では軸方向の直応力が最大あるいは最小の主応力に一致し、主方向は x, z 方向になる。これに対し x 軸上では二つの直応力が零になり、せん断応力の方は最大値をとる。したがってこの位置では式

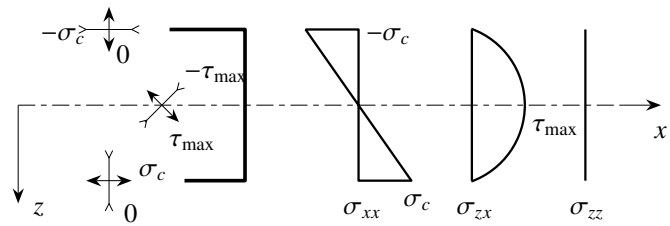


図 4.74 梁の断面に発生する応力分布と主方向

(3.30) (3.31) を用いると、主応力が $\sigma_I = \tau_{max}$, $\sigma_{III} = -\tau_{max}$ ($\sigma_{II} = \sigma_{yy} = 0$) となり、主方向は x 軸から ± 45 度の方向になる。例えばコンクリート材料のように引張に非常に弱い材料で単純梁ができている場合、梁の下面では x 方向に最大の引張主応力が発生するため、もしひび割れが入るとしたら z の負の方向に進展することが予想される。一方断面の中央部ではその主引張方向が x 軸に対して 45 度傾いているため、梁の下面で発生したひび割れは上方に進展するに従って曲がっていき、図心位置付近では x 軸から 45 度くらい傾いた方向に進展することも予想され、実験でも観察されている。3 次元で最も低次の定ひずみ四面体有限要素を用いて、スパンが $\ell = 0.2\text{ m}$ で矩形断面 $h \times w = 0.16 \times 0.005\text{ (m)}$ のかなり短い片持ち梁のせん断を解析したのが図 4.75 である。スパン方向に 40 分割で桁高方向に 32 分割し合計 3986 節点・15360 要素でモデル化した場合の結果で、図中のデータ位置は積分点のそれである。スパン中央付近の応力分布は梁理論のそれをよく示しているが、固定端は梁の境界条件を 3 次元的に実現するのが困難なため、その拘束の仕方によって梁理論とは異なる分布になっているが、この梁理論との乱れは端部から離れるに従ってその影響が小さくなる。このような乱れの距離減衰効果は総じて **Saint-Venant** の原理と呼ばれている。なおこの例は梁とは呼べないくらい短いものなので、せん断応力と直応力が同じくらいのオーダーになっているが、普通の細長い梁では図 4.4 に示したくらいの大きさの差がある。

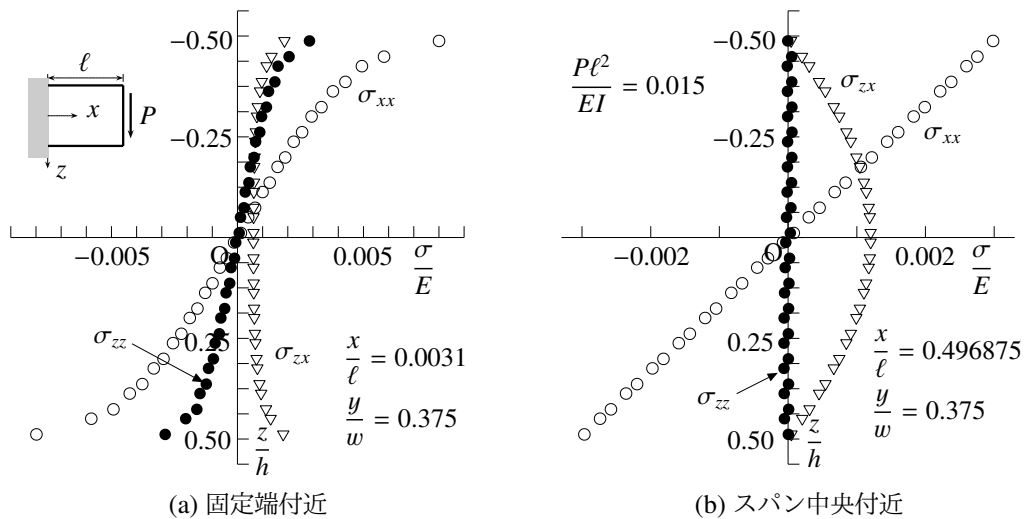


図 4.75 3 次元有限要素による片持ち梁のせん断で生じる応力成分

演習問題 4-10

25. 円形断面の場合のせん断応力分布を求め、最大せん断応力が平均せん断応力の $4/3$ になっていることを示せ。
26. 図 4.73 右側の図にあるような T 形断面の場合のせん断応力分布を求めよ。そして、その結果は気持ちよく容認できるものかどうか、じっくり考察せよ。

(3) 断面力を作らない成分も含むせん断応力分布

ところで、演習問題 4-10 の 26 番の上フランジの厚さに相当する寸法 t は、特に鋼構造の場合は非常に小さいのが普通だ。そういった部材を総じて薄肉断面部材と³⁷呼ぶ。例えば I 形断面の場合のせん断応力分布を式 (4.82) で計算したものを図 4.76 に示した。ウェブの部分では図に示したような値になって滑らかな放物線状に分布するが、フランジとの接合部で不連続が生じ、フランジ部分のせん断応力は比較的小さくなる。これはせん断応力 τ を y 方向には一様なものとして扱って定式化したからである。しかもウェブと直接は接合されていないフランジの $b_1/2$ の突出部分は上下の両面共にせん断応力に対する自由表面なので、上下フランジのせん断応力 τ は y 方向には一様ではない上に、計算値よりはもっと小さく、ほとんど零だと予想できる。したがって式 (4.82) を用いて求めたこの図の細い線で描いたフランジ部分のせん断応力分布は明らかに間違いだ。試しにせん断応力をウェブ部分だけで積分して薄肉だと設定すると、フランジの部分が含まれていないのに

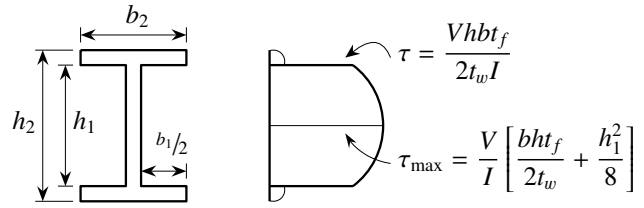


図 4.76 I 形断面に発生するせん断応力分布 - その 1

$$(b_2 - b_1) \int_{-h/2}^{h/2} \tau dz = V \left\{ 1 - \frac{2bt_f^2(3h + t_f)}{2bt_f(3h^2 + t_f^2) + t_w(h - t_f)^3} \right\} \sim V \left\{ 1 - \frac{t}{h} \frac{6b}{6b + h} \right\} \sim V \quad \left[\because \frac{t}{h} \ll 1 \right]$$

となり、薄肉の I 形断面梁ではせん断力のほぼ 100% をウェブだけが受け持っていることがわかる。ただし、上式では $h \equiv \frac{h_2 + h_1}{2}$, $t_f \equiv \frac{h_2 - h_1}{2}$, $b \equiv b_2$, $t_w \equiv b_2 - b_1$ とした。また最後から二番目の式ではウェブとフランジの肉厚をどちらも t とした上で、 h に比べて肉厚が非常に薄い ($t \ll h$) ものとした。

そしてウェブの最大応力もフランジが無い単なる長方形断面の場合と同様

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \tau_{ave} \frac{1 + 4 \frac{b t_f}{h t_w}}{1 + 6 \frac{b t_f}{h t_w}}, \quad \tau_{ave} \equiv \frac{V}{A_w}, \quad A_w \equiv h t_w$$

となり、図 4.77 に示したように実際に用いられる寸法の範囲では、最大応力は平均応力のせいぜい 120% くらいだと考えられる。そのため単純なせん断に対する設計時にはウェブ面積だけを用いた平均応力で照査してもいいのかもしれない。以上の考察からフランジのせん断応力 σ_{zx} は零だと考えてよく、フランジは直応力によって抵抗する役割を主に持っているのみなしていい。ただ鋼構造の場合、ウェブとフランジの接合部では薄板同士を溶接してあることから、溶接ののど厚を設計する場合等には、接合部のせん断応力も工学的な範囲で精度よく求められなければならないのは当然である。では上のモデルで求められた接合部の $\tau = \frac{Vhb t_f}{2t_w I}$ の精度は十分なのだろうか。また本当にフランジ部分にはほとんどせん断応力が発生してはいないのだろうか。

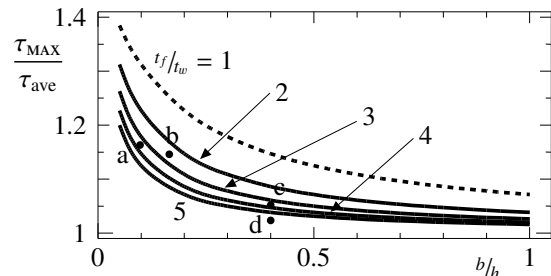


図 4.77 I 形断面ウェブの τ_{max} ; a. アーカンソーリバー橋, b. 合成桁阪神公園標準, c. 長柄橋, d. 新十三大橋。4 例 [190] は下フランジ厚を用いた

実は二つ目の問に対する答は否である。前節のせん断応力の誘導の一番最初で σ_{xy} を σ_{zx} に比べて比較的小さいものとして無視していたが、フランジでは逆になるからだ。つまり、フランジの z 方向の断面寸法 (板厚) は y 方向の断面寸法 (突出幅) よりも非常に小さいため、せん断応力の分布状況もこの寸法比率に近い大きさ

³⁷ シカゴ北部のとある食堂のすき焼き (とはちょっと概念の異なる食べ物) の肉は厚かったが、どうやら薄く切ることができないからだった。さてその近所にある肉屋のウィンドウには **MEAT** という電光サインがあって **M** がゆっくり明滅していた。

比になっており、ウェブとは逆に σ_{xy} の方が σ_{zx} より有意になっている。もちろん z - x 面内で曲げを受ける梁理論の範囲内では、 y 方向のせん断力という断面の抵抗力を期待していないし、考える必要も無いため、この σ_{xy} の断面内平均は零になることが容易に予想できる。したがって σ_{xy} そのものも求める必要は無いかもしれないが、ウェブとの接合部の設計等で少し心配があるので、その大きさと分布をここでは調べておこう。

そこで少し一般化してフランジでもウェブでも通用し、さらに I 形断面以外の薄肉断面でも考え易いように、図 4.78 のように薄板に沿った断面内座標として s 軸を考え、この s - x 面内の x 方向の力のつり合いから、梁理論で求められた直応力 σ_{xx} につり合うようなせん断応力 τ を求めておこう。もちろん前出の I 形断面のフランジやウェブの場合には、この s 軸はそれぞれで y 軸あるいは z 軸に平行にとればいい。さて図にも示したように、ここでも肉厚方向の分布を無視して近似的に平均的な応力のみを考えるため、再度せん断応力 τ と表記する。体積力は式 (4.81) の誘導でも無視できたので、最初から考えないで、前節と同様に x 方向の力のつり合いをとると

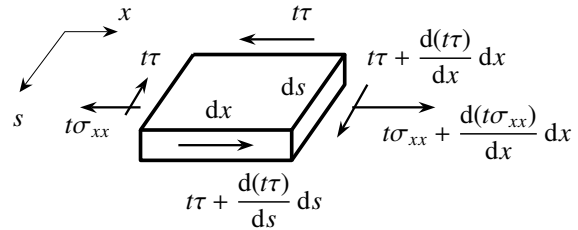


図 4.78 任意の薄肉部分に発生するせん断応力と直応力のつり合い

$$\frac{\partial(t\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(t\tau)}{\partial s} = 0$$

であるから、 s について積分することにより最終的にせん断応力が

$$\tau(s, x) = \frac{1}{t(s)} (t\tau)|_{s=s_0} - \frac{V(x)G_s(s)}{t(s)I} \tag{4.84}$$

となる。ここに s_0 は s 軸に沿って積分するときの起点の座標値であり

$$G_s(s) \equiv \int_{s_0}^s t(\xi) z(\xi) d\xi \tag{4.85}$$

は s の関数としての断面 1 次関数である。また ξ は s に関する積分の補助変数であり、 z も s の関数として取り扱うことができるようにパラメトリック表示してある。形式的には式 (4.82) と同じである。

より一般的な薄肉断面の場合、特に閉断面³⁸の場合については別途文献を参照して欲しい。ここでは I 形断面のような薄板の集合として作られた開断面のみを対象とする。その場合、図 4.79 に示したようにウェブとフランジの板同士の接合点が存在する。上フランジではそれぞれの突出端がせん断応力に関しては自由表面なので、そこから s_1, s_2 軸を定義しておく

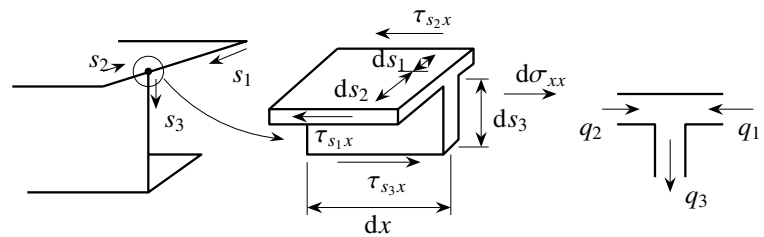


図 4.79 ウェブとフランジとの接合部のせん断流の連続条件

そこから s_1, s_2 軸を定義しておく。これに対しフランジとウェブの接合点の s_3 軸の起点では、応力の連続性からその条件を求めなければならない。そこで図 4.79 の中央の図のように接合点近傍の微分要素の x 方向の力のつり合いをとると

$$d\sigma_{xx} (ds_1 + ds_2 + ds_3) + (t_3\tau_{s_3,x} - t_2\tau_{s_2,x} - t_1\tau_{s_1,x}) dx = 0$$

が成立しなければならない。ここに t_i はそれぞれの区間の肉厚である。第 1 項の直応力の部分は第 2 項に比べると高次項なので無視すると、結局接合点では

$$t_3\tau_{s_3,x} - t_2\tau_{s_2,x} - t_1\tau_{s_1,x} = 0$$

³⁸ 閉断面や開断面の意味については第 7.2 節を参照のこと。

を満足しなければならない。あるいはせん断流という量を

$$q_i(x, s) \equiv t_i(s) \tau_{s_i x}(x, s) \quad (4.86)$$

と定義しておく、上の連続条件は

$$q_1 + q_2 = q_3 \quad (4.87)$$

とも表現できる。すなわち、図4.79の右側の図に示したように、ちょうどT字になった水路の流量の連続性が式(4.86)のせん断流の連続条件になっている。このことから「流」の文字が用いられている。

I形断面の例: では図4.76の薄肉の2軸対称I形断面を例にして、せん断応力の分布を求めてみよう。 s の座標は図4.80に定義した。 s_1 の始点は自由表面に当たるので $t\tau_{s_1 x}|_{s_1=0} = 0$ となり

$$G_s = \int_0^s t_f(-h/2) ds_1, \quad s_1 = y + b/2$$

であるから

$$G_s = -\frac{t_f h}{2} \int_{-b/2}^y d\xi = -\frac{t_f h}{2} \left(y + \frac{b}{2} \right), \quad \tau_{s_1 x} = \frac{hV}{2I} \left(y + \frac{b}{2} \right)$$

となる。 s_4 も同様で、 $z = h/2$ であることに注意すれば

$$\tau_{s_4 x} = -\frac{hV}{2I} \left(y + \frac{b}{2} \right)$$

を得る。次に s_2 についても $s_2 = b/2 - y$ であることに注意すれば、上の誘導とほとんど同じ計算をすればよく

$$G_s = -\frac{t_f h}{2} \left(\frac{b}{2} - y \right), \quad \tau_{s_2 x} = \frac{hV}{2I} \left(\frac{b}{2} - y \right)$$

となる。同様に s_5 についても

$$\tau_{s_5 x} = -\frac{hV}{2I} \left(\frac{b}{2} - y \right)$$

を得る。

一方、上フランジとウェブの接合点では式(4.87)の連続条件が成立しなければならないから、上で得た結果を代入すると

$$t_w \tau_{s_3 x}|_{s_3=0} = t_f \tau_{s_1 x}|_{s_1=b/2} + t_f \tau_{s_2 x}|_{s_2=b/2} = \frac{t_f h V b}{2I}$$

となる。これで s_3 方向への始点のせん断流の値が求められた。よって

$$\tau_{s_3 x} = \frac{1}{t_w} \left(\frac{t_f h V b}{2I} \right) - \frac{V G_s}{t_w I}$$

と表現でき、 $s_3 = z + h/2$ だから

$$G_s = t_w \int_0^s z ds_3 = t_w \int_{-h/2}^z \xi d\xi = \frac{t_w}{2} \left\{ z^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right\}$$

が断面1次関数になる。したがって、ウェブ内のせん断応力分布は

$$\tau_{zx} = \frac{V(x)}{8I} \left\{ \frac{4bht_f}{t_w} + h^2 - 4z^2 \right\}$$

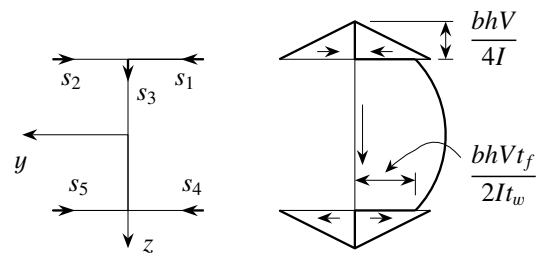


図4.80 I形断面に発生するせん断応力分布 - その2

になる。以上の分布の結果を図 4.80 の右側の図に示した。

まずウェブのせん断応力分布を見てみよう。ウェブ上下端のせん断応力値とウェブ中央のせん断応力の最大値とはそれぞれ

$$\frac{Vhbt_f}{2t_wI}, \quad \frac{V}{I} \left(\frac{bht_f}{2t_w} + \frac{h^2}{8} \right)$$

になった。前者は図 4.76 に示したせん断応力の値と一致する。後者の最大値は図 4.76 で示したものの h_1 を h で置き換えたものになっているが、 $h_1 = h - t_f$ であることから、薄肉断面である限りこの 2 者の差は非常に小さく両者は一致していると考えていい。つまりウェブだけに着目すれば、フランジの肉厚が薄い限り前節のせん断応力の算定でも十分であることが明らかになった。試しに新しく求めた τ_{s3x} の方をウェブ断面内で積分すると、この場合には当然ながらびったり V に一致する。

一方、ここで新たに導出されたフランジにおける有意なせん断応力成分 σ_{xy} は、図 4.80 に示したように分布する。この分布は断面内で総和をとると零になるように、お互いのフランジ突出部分同士で打ち消しあっている。したがって、断面力としての y 方向成分が存在しないことも整合する。このウェブ端の応力値 $\tau = bhv/4I$ がウェブとフランジの接合点には生じているので、溶接ののど厚等を設計する場合にはこの値を用いればいいことになる。実は第 1 著者は、なぜせん断応力を確認すべきところに断面 2 次モーメントが介入するのかわからなかった。さらにせん断弾性係数がどこにも無いのも理解できなかった。構造力学とは不思議な力学だ。

(4) 溝形断面梁を曲げるとねじれませんか？

薄肉断面のもう一つの代表の溝形断面は s 軸に分岐が必要無いので I 形断面より計算は楽だ。そこで図 4.81 のように左右が非対称になるように用いた場合、実際に演習問題 4-11 の 27 番を解いてせん断応力分布を求めることができる。その結果を用いると、このせん断応力分布が作る y 方向の合応力が零になり、 z 方向の合応力が V になることも容易に確かめることができる。さてそれでは、原点 O 回りのモーメントを算定してみよう。これも容易に積分でき、結果は

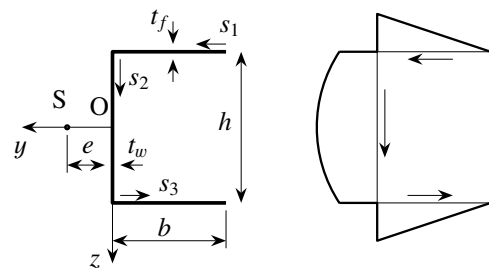


図 4.81 溝形断面に発生するせん断応力分布

$$M_x = \frac{h^2 b^2 t_f V}{4I} \neq 0 \tag{*}$$

となってしまう。すなわち z - x 面内で曲げを受ける梁の挙動を問題の対象にしているにもかかわらず、この棒は原点回りに（図心回りであっても零にならないので各自確かめて欲しい）ねじり抵抗モーメントを発生させている。それは図 4.81 の右側の図に示したせん断流の矢印を見ても明らかだろう。逆に考えると、図心あるいは原点を作用線が通るようなせん断力を与えて曲げのみを与えたつもりでも、棒はねじれてしまうのだ。梁理論が y 方向の拡がりを見捨てて定式化されているので、2 軸対称ではない断面の場合、このように神秘的なことが起こる。

一般に 2 軸対称ではない断面の梁の図心をせん断力が通るように曲げを加えた梁はねじれる。では、ねじれないように棒を曲げるにはどうしたらいいか。それは上式(*)のねじりモーメントが零になるようにせん断力 V が発生（作用）すればいいことになる。この場合は図 4.81 の左側の図に示した点 S をせん断力の作用線が通るようにすればねじれなくなる。この点 S をせん断中心と呼び、溝形断面の場合には式(*)を用いて

$$e = \frac{M_x}{V} = \frac{h^2 b^2 t_f}{4I}$$

の位置になる。より一般的なせん断中心の定義については別途文献あるいは第7章を参照のこと。対傾構のような2次部材には形鋼を用いることがあるが、溝形鋼や山形鋼は突出辺が片方だけなのでH形鋼を使うより接合が楽になるというメリットがある。しかし、立体骨組としてそれを解析するときには、上述のように多少面倒なことがあるので注意が必要だ。

演習問題 4-11

27. 図 4.81 に示した溝形断面のせん断応力分布が図 4.81 つまり次式になることを示せ。

$$\tau_{s1,x} = \frac{Vh}{2I}(y+b), \quad \tau_{s2,x} = \frac{Vbht_f}{2It_w} + \frac{V}{2I} \left\{ \left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right\}, \quad \tau_{s3,x} = \frac{Vh}{2I}(y+b)$$

4.6.2 せん断遅れ

結局、面内曲げを受ける初等梁理論は断面の横向き y 方向の変形等は一律で無視していた。しかし模式図 4.82 のような、比較的幅の広い断面の梁³⁹を対象とする場合には、この幅の広いフランジ部分に発生するせん断応力 σ_{xy} による（床版が平板として挙動する）影響、つまり断面の y 方向の非一様性が無視できない場合がある。そのため、全部の断面が初等梁理論の範囲内で抵抗すると仮定して求められる直応力 $|(\sigma_{xx})_{beam}|$ （図中の一点鎖線）よりも大きな直応力が主桁部に生じ、しかもその直応力分布は y 方向にも一律ではなくなる。このような現象をせん断遅れと呼ぶが、正確に応力分布を求める方法等については文献 [195] 等を参照して欲しい。実際の設計では上フランジの一部を無視し、各 T 形部分を中心にしてある適当な幅 b_e の上フランジを持つ T 形梁に置き換え、それに初等梁理論を適用して直応力分布の最大値を簡便に計算する手法が用いられることがある。図の上方の水平な実線がその値を用いた結果である。この幅 b_e を有効幅と呼んでいる。これも詳細については別途文献を参照のこと。

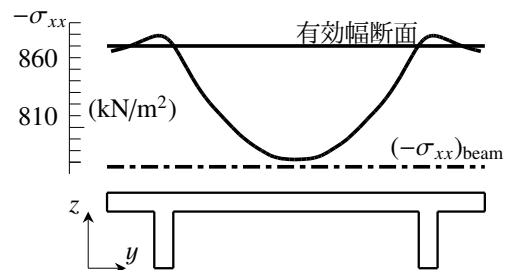


図 4.82 幅広断面に生じる直応力分布

4.6.3 せん断変形を考慮した梁理論

初等梁理論ではせん断変形を無視し、せん断力は軸線方向への一律ではない曲げモーメントに対する反力的な存在 $\{V(x) = M'(x)\}$ だった。さらにせん断応力は得られた直応力とつり合うように求められていたため、せん断弾性係数を介した構成則が必要無かった。しかし図 4.4 から明らかなように、梁の長さが短くなるとせん断変形が無視できるというそもそもの仮定が成立するとは限らない。そこで初等梁理論を若干改良

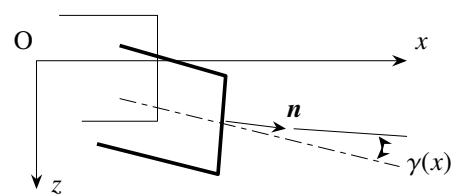


図 4.83 Timoshenko 梁のモデル

して、せん断変形を無視しない理論を紹介しておこう。代表的かつ有名なモデルは **Timoshenko 梁理論** と呼ばれているもので、断面に一律なせん断変形が生じるという仮定から定式化を始めるモデルである。図 4.83 に簡単な概念を示したが、変形した梁の軸線と断面の法線ベクトル n とが一致せず、断面に一律なせん断変形 $\gamma(x)$ が発生し得るモデルである。これ自体は実際に生じる放物線分布とは整合せず、また自由表面であるはずの梁

³⁹ 近年よく用いられる合理化橋梁の一つに PC 床版を併用した少数主桁橋梁があるが、従来の鉄桁よりは幅広になっているように見える。ついでに書いておくと、桁高やフランジ寸法が比較的大きくなるため、運搬の観点から添接が増える場合もあるようだ。

の上下縁でせん断応力が零にならないことも力学的にはおかしく、無理な近似ではあるものの、こうすることによってせん断力をせん断応力で定義できる理論⁴⁰になる。

ひずみ場の仮定で式(4.2)のうちせん断ひずみ成分 ϵ_{xz} に対する仮定を緩め、せん断に関する Hooke の法則式(3.45)も用いて

$$2\epsilon_{xz} = \gamma(x), \quad \sigma_{xz} = G\gamma(x)$$

のように仮定する。これを用いると、変位場の式(4.3)と軸方向のひずみ成分は

$$u_x(x, z) = u(x) + z \left\{ -\frac{dw(x)}{dx} + \gamma(x) \right\}, \quad u_z(x, z) = w(x), \quad \epsilon_{xx} = \frac{du(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} + z \frac{d\gamma(x)}{dx}$$

のように変更される。さらに、曲げモーメントと変位の関係式(4.13b)は

$$M(x) = -EI \left\{ \frac{d^2w(x)}{dx^2} - \frac{d\gamma(x)}{dx} \right\}$$

で置き換わる。またせん断力はもはや曲げモーメントの反力的な断面力ではなく、上のせん断応力の断面内の合応力として

$$V(x) \equiv \int_A \sigma_{xz} dA = Gk_T A \gamma(x)$$

で定義できる。この k_T は単純な定式化からは $k_T = 1$ になるはずだが、実際には図 4.74 のように断面内で非一様に分布するはずのせん断変形を、図 4.83 のような断面内一定のせん断変形 $\gamma(x)$ で胡麻化してしまっているので、それを補正するために別途導入された係数である。値そのものは断面形状と Poisson 比 ν に依存する定数 [17] で、例えば式 (A.7) のような値を持つ。

以上の誘導から得られる主な支配方程式を文献 [172] を真似て無次元化して表示すると

$$-\bar{w}'''' + \bar{q} - \alpha_T \bar{q}'' = 0, \quad \bar{M} = -\bar{w}'' - \alpha_T \bar{q}$$

となる。ここに

$$(\cdot)' \equiv \frac{d}{d\xi}, \quad \xi \equiv \frac{x}{\ell}, \quad \bar{M} \equiv \frac{M\ell}{EI}, \quad \bar{q} \equiv \frac{q\ell^3}{EI}, \quad \bar{w} \equiv \frac{w}{\ell}$$

と定義し直した。上式の下線部がせん断変形の影響を代表している項である。式中の α_T は式 (A.15) で定義した。これだけでは、分布外力 q が存在しなければ初等梁理論の支配方程式と一致しそうに見えるが、付録 A の式 (A.3) にあるように、断面の回転とたわみの関係にせん断変形が含まれているため、分布外力が無くても境界条件に違いが現れ、それを通して解は初等梁理論のものとは異なってくるので注意が必要だ。例えば矩形断面の場合は、式 (A.7b) と等方弾性体の関係式 (3.48a) を用いて α_T は

$$\alpha_T = \frac{12 + 11\nu}{5} \frac{1}{\lambda^2}, \quad \lambda \equiv \frac{\ell}{\sqrt{I/A}}$$

となる。 λ は一般に細長比と呼ばれているものであり、純粋に断面の代表寸法と梁の長さの比である。

上の支配方程式からも明らかなように、 α_T が相対的に大きい場合にせん断変形の影響が顕著になることがわかる。逆に言うと α_T が小さい場合、つまり

1. G が大きい \rightarrow せん断抵抗が大きい場合、あるいは

2. λ_T つまり λ が大きい \rightarrow 非常に細長い場合

⁴⁰ 詳細は付録 A を参照のこと。

初等梁理論で十分な精度の解を得ることができることがわかる。この二つ目の条件は、幾何学的条件によって力学挙動が一見変わって見えるという面白い結果であるが、梁に対して用いた基本的な仮定のうちの一つの Bernoulli-Euler の仮定式(4.2)や図4.4を裏付けるものでもある。例えば単純支持梁中央に荷重 P を載せた3点曲げの問題は、半分の長さの片持ち梁の先端に $P/2$ を載せた問題と同じになるので、それを解くと、3点曲げの中央のたわみは

$$w(\ell/2) = \frac{P\ell^3}{48EI} + \frac{P\ell}{4Gk_T A} \tag{4.88}$$

となる。第1項は Bernoulli-Euler 梁の解であり、第2項がせん断変形の影響である。半スパンはせん断力 $P/2$ 一様な場なので、一様なせん断変形 $\gamma = P/2Gk_T A$ が生じ、これによる中央のたわみがその $\ell/2$ 倍になっているというのが、この第2項である。

実用的には、このようにしてせん断変形の影響を入れた解とそうでない初等梁理論の解との差は α_T 程度、すなわち細長比の2乗に逆比例した程度である。一例として図4.84に簡単な問題の結果を示しておいたが、この程度の影響に過ぎない。したがって、極端に短い梁の挙動を調べたり梁の衝撃外力に対する応答あるいは高周波振動等を対象とする場合を除き、Timoshenko 梁理論を用いる必要は無い。詳細については文献[172]等を参照のこと。

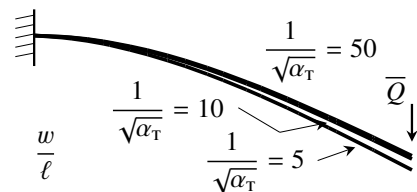


図4.84 片持ち梁を例にしたせん断変形の影響

演習問題 4-12

- 28. 上式(4.88)を求め、図4.84のような性質を確認せよ。
- 29. 両端固定 Timoshenko 梁の右端を強制的に Δ だけ変位させたときの、左端から $1/3$ 点のたわみを求めよ。

4.7 梁のその他の問題

4.7.1 弾性床上の梁

杭や管等のように地中に埋められた棒の曲げや、図4.85のように直接地表に置かれた棒の曲げ挙動をモデル化したものの代表として、弾性床上の梁理論がある。最も実用的で代表的な弾性床は Winkler 型と呼ばれるもので、梁のたわみに比例した弾性抵抗反力を発生する床である。つまり土圧や地盤反力のようなものに相当する。この床の単位長さ当たりの抵抗係数を k_w としたとき、梁に対しては $\{k_w w(x)\}$ だけの分布反力が変位 $w(x)$ とは逆向きに作用する。したがって、そのつり合い式は式(4.22b)が

$$-EI w''''(x) - k_w w(x) + q(x) = 0 \tag{4.89}$$

となるだけで、他はすべて通常の梁理論と同じである。ただ注意しなければならないのは、この床と梁は一般には接着剤で接合されていて梁が床から離れることが無いものとしていることだ。

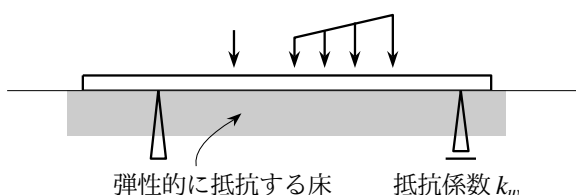


図4.85 弾性的に変形する床上にある梁



図4.86 半無限に長い弾性床上の梁

斉次解を求めるために $q(x) \equiv 0$ として $w \sim \exp(\xi x)$ を上式に代入すると

$$\xi^4 + 4\beta^4 = 0, \quad \text{ただし} \quad \beta^4 \equiv \frac{k_w}{4EI}$$

と特性方程式を得るから、特性根は

$$\xi = \pm(1 \pm i)\beta$$

である。ここに i は虚数単位である。したがって斉次解のみの一般解は

$$w(x) = \exp(\beta x)(a \sin \beta x + b \cos \beta x) + \exp(-\beta x)(c \sin \beta x + d \cos \beta x) \quad (4.90)$$

となる。未定定数は境界条件で決められる。例えば非常に長い杭等のモデルとして、図 4.86 にあるような x 軸の正方向に無限に長い梁を考え、その端部に集中せん断力 Q が作用している場合を解いてみる。この場合の境界条件は

$$-[-EIw'''(0)] = Q, \quad -[-EIw''(0)] = 0, \quad w(+\infty) \equiv 0$$

で与えられる。まず式 (4.90) の一般解のうちの第 1 項は $x = +\infty$ の境界条件を満足し得ないため除外される。したがって、残った積分定数 c, d を $x = 0$ の境界条件で決定すれば、結局

$$w(x) = \frac{Q}{2EI\beta^3} \exp(-\beta x) \cos(\beta x)$$

が解となる。

演習問題 4-13

30. 演習書 [131] にとても面白い問題がある。ある有限のしかし少し長めの長さ l の梁が弾性床上に置いてある。ただし床と梁とは接着されておらず、梁が上方にたわんだ場合には梁と床は分離できるものとする。この梁の中央に集中外力を作用させたとき、梁の両端が床から浮き上がったとする。弾性床に接している梁の部分の長さがいくらかになるのか求めよ。一種の固有値問題になっている。

4.7.2 棒の運動と初期値境界値問題

(1) 棒の縦振動

動的問題の支配方程式は Newton の法則を用いれば簡単に誘導できる。例えば柱の静的問題では式 (4.22a) が x 方向の力の総和で、それがつり合って物体が静止していることを示している。これは Newton の運動方程式で加速度が零の静止している状態なので、動的問題の場合は、この（力の総和）が（質量 \times 加速度）に等しくなるというのが Newton の法則だから、柱（棒）の単位長さ当たりの質量を m とするとその運動方程式は

$$EA u''(x, t) + p(x, t) = m \ddot{u}(x, t)$$

となる。上付きドット ($\dot{\quad}$) は時間に関する微分を表す。分布外力 $p(x, t)$ が無い場合にはこの式は

$$u'' = \frac{1}{c_b^2} \ddot{u}, \quad c_b \equiv \sqrt{\frac{EA}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.91a, b)$$

と表現できる。 $\rho \equiv m/A$ は密度である。この式は式 (3.155) と同じ形の波動方程式である。式中の c_b は棒の縦振動が伝わる波の速度であり、鋼では $E = 205 \text{ GN/m}^2$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ から $c_b = 5.1 \text{ km/s}$ 程度になる。具体的な解法等については第 10 章を参照のこと。

(2) 梁の曲げ振動

同様に梁の曲げ振動の場合は式(4.22b)に慣性項を加えればよく

$$-EI w''''(x, t) + q(x, t) = m \ddot{w}(x, t) \quad (a)$$

となることも容易に理解できるだろう。式(4.13b)が、曲げモーメントという抵抗力が軸の曲率の抵抗係数 EI 倍として発生していることを示しているのも、もし材料そのものに粘性が存在して何らかの速度依存の抵抗力も持っていると考えれば、一つの代表的なモデルとしてはこの式(4.13b)を粘弾性に拡張した

$$M(x) = -EI w''(x, t) - \eta I \dot{w}''(x, t)$$

のような構成則を持つと設定してもよさそうである。ここに η は粘性に関する材料定数である。このような材料でできた梁の動的問題の場合の運動方程式は、上式(a)の代わりに

$$-EI w''''(x, t) - \eta I \dot{w}''''(x, t) + q(x, t) = m \ddot{w}(x, t) \quad (4.92)$$

とも表現できる。

各量が場所 x と時間 t の関数になることだけを変更すれば、境界条件等は静的問題のそれとすべて同じである。しかし動的問題の場合は時間的な変化を追跡する問題であるから、この境界条件に加えて初期条件というものが多くなる。つまり、ある基準となる時刻（通常は時刻 $t = 0$ とすることが多い）に状態がどのようになっているのかを規定する必要がある。

このように、境界条件のみならず初期条件も規定した上で時間と場所の関数の偏微分方程式を解く問題を初期値境界値問題と呼んでいる。時間に関しては上の運動方程式からも明らかのように2階の微係数が最も支配的な項であることから、初期条件も二つ必要になるので、梁の曲げ問題の場合には、通常

$$w(x, 0) = f(x) \equiv (\text{初期位置}), \quad \dot{w}(x, 0) = g(x) \equiv (\text{初速度}) \quad (4.93a, b)$$

として与えることが多い。具体的な解法等については第9章を参照のこと。ところで木琴って梁としての振動なんだろうか。どうなっているんだろう。

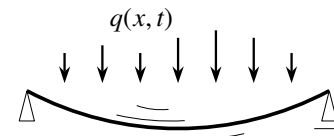


図 4.87 単純梁の振動

4.8 トラスと骨組

4.8.1 単位荷重法の一般化

式(4.13) (4.19) (4.20) で支配方程式が軸力の問題と曲げの問題に分離できたことから、ここまでは主に曲げのみを受ける梁を対象にしてきた。実際の社会基盤構造で細長い部材でモデル化できる対象は、梁だけではなく柱も一緒に組み込まれている。各部材がヒンジで接合されている構造をトラス構造と呼び、剛結されている構造を骨組（ラーメン）構造と呼ぶ。ここでは、トラスと軸力と曲げを同時に受ける骨組と、そしてその両方でできた構造とに対する単位荷重法の利用を解説する。なお、二つの大きな制約条件をまず記しておく。

1. すべての部材は、個々に断面が異なる場合であっても図心同士でつながっているものとする。
2. 中立軸上の諸量で支配方程式が書くことができ、軸力と曲げの問題は分離できるものとする。

つまり、現実の構造を直接は対象としていないことには十分注意して欲しい。少しドロドロしたことを書くと、各種試験対策の節である。呵呵。しかし基本的には、静定系の重ね合わせで不静定構造を解析する手法の一具体例であり、重ね合わせて元の構造系に戻す際に考えるべき幾何学的・運動学的整合性の確保の部分に、ある1点の変位を求める単位荷重法を利用する標準的な解法である。

図 4.88 のように一般的なトラスや骨組の各部材の軸線に沿って適切な始点から x 軸をとり、それに直交したたわむ方向を z 軸とする。まず解きたい問題 A は、与えられた境界条件と荷重条件の下で x 方向と z 方向の変位 $u(x)$ と $w(x)$ が生じ、軸力 $N(x)$ と曲げモーメント $M(x)$ が生じているものとする。したがって

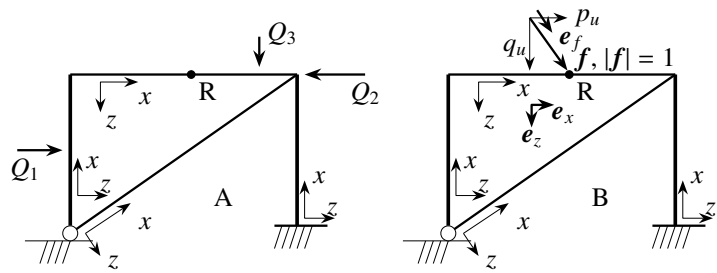


図 4.88 例えば骨組の問題 A と問題 B

$$N = EA u', \quad M = -EI w'', \quad V = M', \quad \theta = -w' \quad (4.94a, b, c, d)$$

を満足している。 $V(x)$ はせん断力で、 $\theta(x)$ はたわみ角である。これに対し別途、元の問題 A で変位を求めたい点 R (形式的に $x = a$) に、 x 方向成分と z 方向成分が $p_u(x; a)$ と $q_u(x; a)$ の単位集中荷重だけが作用した問題を問題 B と呼ぶことにする。この単位荷重の二つの成分 $p_u(x; a)$ と $q_u(x; a)$ はどちらも定数ではあるが、Dirac のデルタ関数 $\delta(x; a)$ を伴った分布荷重として定義するので、関数のような表現にしてある。その問題 B で生じる変位を $u_u(x; a)$, $w_u(x; a)$ と記し、断面力を $N_u(x; a)$, $M_u(x; a)$, $V_u(x; a)$ と記すことにする。以下、適宜引数は省略する。このとき問題 B は問題 A と同じ幾何学的な境界条件を満足し

$$N'_u + p_u = 0, \quad M''_u + q_u = 0, \quad M'_u - V_u = 0, \quad N_u = EA u'_u, \quad M_u = -EI w''_u \quad (4.95a, b, c, d, e)$$

を満足している。そこで、この問題 B のつり合い式 (4.95a) (4.95b) と問題 A の変位との内積で定義される仮想仕事式を書くと

$$\int_0^\ell [u (N'_u + p_u) + w (M''_u + q_u)] dx = 0$$

が成立する。ここでは形式的に長さ ℓ の部材の積分としているが、実際には各部材毎の積分の全体構造部材分の総和である。この仮想仕事項をそれぞれ部分積分して (複雑な系でそんなことが安易にできるかという難しい間はさておき、形式的に)、式 (4.94) (4.95) の断面力と変形の関係とを考慮すると、最終的に上式から

$$\{u N_u + w V_u + \theta M_u\} \Big|_0^\ell + \int_0^\ell u p_u dx + \int_0^\ell w q_u dx - \int_0^\ell \frac{N N_u}{EA} dx - \int_0^\ell \frac{M M_u}{EI} dx = 0 \quad (4.96)$$

を得る。

第 4.4.2 (4) 節で説明したように、もし単位荷重の作用点 R が境界である場合、つまり境界の変位を求めたい場合の単位荷重法の公式は、以下で定式化するそうではない場合の公式と最終的には一致するので、ここでは単位荷重の作用点 R が部材の中間のどこかにある場合に限定した定式化を示す。その場合は式 (4.96) の第 1 項の境界項は零になる。そして $x = a$ の単位荷重ベクトル $f(x; a)$ が、それが作用している部材の局所系の軸方向単位ベクトル e_x 方向成分 p_u と、それに直交する方向の単位ベクトル e_z 方向成分 q_u とで

$$f(x; a) = p_u e_x + q_u e_z = \delta(x; a) e_f, \quad p_u^2 + q_u^2 = 1 \quad (4.97a, b)$$

のように (図 4.88 の e_x と e_z の例は上部の梁の局所系) 与えられたとする。 $\delta(x; a)$ は Dirac のデルタ関数なので、この $f(x; a)$ は単位の大きさを持つ $x = a$ の集中外力に相当し、その力の向きが単位ベクトル e_f の方向である。ちなみに p_u と q_u および $\delta(x; a)$ の次元は前述のように [長さ]⁻¹ である。このとき、式 (4.96) の第 2 項と第 3 項の和は

$$u(x) = u(x) e_x + w(x) e_z$$

で定義される問題 A の変位ベクトル $\mathbf{u}(x)$ と、上式 (4.97) の単位荷重ベクトル \mathbf{f} との内積になっているので

$$\int_0^\ell u p_u dx + \int_0^\ell w q_u dx = \int_0^\ell \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{f}(x; a) dx = \int_0^\ell \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{e}_f \delta(x; a) dx = \mathbf{u}(a) \cdot \mathbf{e}_f = u_f(a) \quad (4.98)$$

となる。ここの $u_f(a) \equiv \mathbf{u}(a) \cdot \mathbf{e}_f$ は問題 A の点 R の変位ベクトル $\mathbf{u}(a)$ の \mathbf{e}_f 方向成分である。したがって、仮想仕事式 (4.96) は

$$u_f(a) = \int_0^\ell \frac{N(x) N_u(x; a)}{EA} dx + \int_0^\ell \frac{M(x) M_u(x; a)}{EI} dx \quad (4.99)$$

のように、任意のトラスや骨組の点 R ($x = a$) の \mathbf{e}_f 方向の変位を求める単位荷重法の公式が求められる。

もし対象がトラス構造であれば曲げモーメントは生じないから、上式は一旦

$$u_f(a) = \int_0^\ell \frac{N(x) N_u(x; a)}{EA} dx$$

となる。しかし、外力はトラスの格点にしか作用しないし、トラスの各弦材の断面形状が軸方向に一定であれば上式の被積分関数は各弦材毎に定数になり、最終的にトラスの変位を求める単位荷重公式が

$$u_f(a) = \sum_{k=1}^K \frac{N^{(k)} N_u^{(k)} \ell^{(k)}}{EA^{(k)}} \quad (4.100)$$

と表現される。ここに上付き添え字の (k) は k 番目の弦材であることを示し、それぞれの軸力が $N^{(k)}$ と $N_u^{(k)}$ で、弦材長が $\ell^{(k)}$ 、また伸び剛性が $EA^{(k)}$ で K は総弦材数である。

これに対して $p_u(x; a) \equiv 0$ の場合には、式 (4.99) の左辺はたわみだけなので

$$w(a) = \int_0^\ell \frac{N(x) N_u(x; a)}{EA} dx + \int_0^\ell \frac{M(x) M_u(x; a)}{EI} dx$$

となり、式 (4.62) に軸力の影響も考慮して骨組のたわみを求める汎用性のある単位荷重公式が得られている。もし軸力の影響を無視してもいいくらい細長い部材でできた骨組の場合や、連続梁のように軸力が発生しない場合には、上式の右辺第 1 項は第 2 項に比べて無視でき、それは式 (4.62) に一致する。ちなみに、軸力の寄与分が無視できる場合に点 R のたわみ角を求める単位荷重公式は式 (4.63) である。

4.8.2 トラスの変位と断面力

(1) 静定トラス

ではまず式 (4.100) を用いてトラスの変位を求めてみよう。トラスの各弦材は伸び縮みするだけだが、では格点の変位を幾何学的な考察で求めようとする、たとえばそれが静定トラスであってもちよっと途方に暮れるのではないだろうか。そこで図 4.89 の静定トラスの頂点の右向きの変位を単位荷重法で求めてみよう。静定なので反力は力とモーメントのつり合いだけで求めることができ

$$F_1 = -\frac{\sqrt{3}P}{2}, \quad F_2 = \frac{\sqrt{3}P}{2}, \quad H = -P$$

を得る。あとは例えば節点法を用いると、各弦材の軸力が

$$N^{(1)} = P, \quad N^{(2)} = \frac{P}{2}, \quad N^{(3)} = P$$

と求められる。頂点の水平変位を求めるためには、そこに水平に単位の外力を与えた系を考えればよいので、上の結果の P を 1 にすればいいだけである。したがって

$$N_u^{(1)} = 1, \quad N_u^{(2)} = \frac{1}{2}, \quad N_u^{(3)} = 1$$

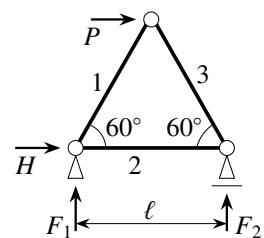


図 4.89 静定トラス

である。これを式(4.100)に代入すれば、頂点の水平変位 u_p が

$$u_p = \frac{\ell}{EA} \left\{ P \times 1 + \frac{P}{2} \times \frac{1}{2} + (-P) \times (-1) \right\} = \frac{9P\ell}{4EA} \quad (4.101)$$

のように求められる。これを幾何学的な考察から求めるのは可能だがちょっと面倒だ。

(2) 不静定トラス

次に第2.4.1節の最後で解くことができなかった図4.90の不静定トラスを単位荷重法を用いて解いてみよう。そこでまず、右図のように弦材5の軸力を不静定力 X と置いて、これを二つの系に分解しよう。これでどちらも静定系になるので、不静定力 X は未知のままだが軸力は求めることができる。まず反力は

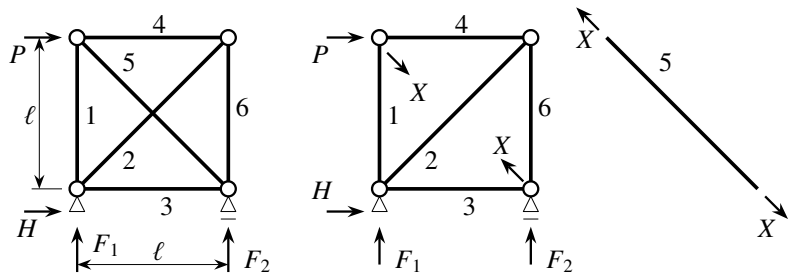


図4.90 不静定トラス

$$F_1 = -P, \quad F_2 = P, \quad H = -P$$

となるので、節点法等を用いて

$$N^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}X, \quad N^{(2)} = X + \sqrt{2}P, \quad N^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}X, \quad N^{(4)} = -P - \frac{1}{\sqrt{2}}X, \quad N^{(6)} = -P - \frac{1}{\sqrt{2}}X \quad \text{および} \quad N^{(5)} = X$$

と求めることができる。これに対し、左上角の X 方向の変位を求めるには、 $X = 1$ のみをこの二つの系に作用させればいから

$$N_u^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N_u^{(2)} = 1, \quad N_u^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N_u^{(4)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N_u^{(6)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N_u^{(5)} = 1$$

である。

まず弦材5を取りはずしたトラスでは、右下の支点は水平方向にしか変位しないので、左上の角の X 方向の変位 Δ_x は式(4.100)から

$$\begin{aligned} \Delta_x = \frac{\ell}{EA} & \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}X \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}X \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(P + \frac{1}{\sqrt{2}}X\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(P + \frac{1}{\sqrt{2}}X\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\} \\ & + \frac{\sqrt{2}\ell}{EA} (X + \sqrt{2}P) \times 1 = \frac{\ell(2 + \sqrt{2})}{EA} (X + P) \end{aligned}$$

になる。第2行の左端の項は長さが $\sqrt{2}\ell$ の弦材2の項である。一方、弦材5だけの左上の角の変位 $\Delta_x^{(5)}$ は単位荷重法を用いるまでもなく

$$\Delta_x^{(5)} = \frac{\sqrt{2}\ell}{EA} X$$

である。この二つの変位はお互いに逆向きを正とする変位なので、分解した系を元の不静定系に戻すことができるためには

$$\Delta_x = -\Delta_x^{(5)}$$

でなければならない。これに上の結果を代入すると、結局

$$X = -\frac{1}{\sqrt{2}}P$$

のように不静定力を求めることができた。

これを用いて各弦材の軸力を求めると

$$N^{(1)} = \frac{1}{2}P, \quad N^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}P, \quad N^{(3)} = \frac{1}{2}P, \quad N^{(4)} = -\frac{1}{2}P, \quad N^{(5)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}P, \quad N^{(6)} = -\frac{1}{2}P$$

となる。そこで、左上角の水平方向の変位を求めるために考える単位荷重を作用させる系は、 $P = 1$ と置くだけでいいので

$$N_u^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad N_u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N_u^{(3)} = \frac{1}{2}, \quad N_u^{(4)} = -\frac{1}{2}, \quad N_u^{(5)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N_u^{(6)} = -\frac{1}{2}$$

でいい。これを式(4.100)に代入すれば、左上角の P 方向の変位 Δ_P が

$$\Delta_P = (1 + \sqrt{2}) \frac{P\ell}{EA} \quad (4.102)$$

のように求めることができる。弦材2と弦材5の長さが $\sqrt{2}\ell$ であることに注意すること。さて、これは間違っていないだろうか。著者が開発した有限要素法のプログラムで数値的には確認できている。呵呵。

(3) 連続トラス

次に図4.91の上の図の連続トラスを対象とする。格点の白丸は省略した。これは一見静定トラスに見えるかもしれないが、支点を3箇所にした連続トラスで、不静定である。簡単のために（そうでもないけど時間がかかるからだが、それでもこれを解くのに著者は4時間ほどかかったし、計算間違いも数箇所あった）、すべての弦材の長さが ℓ の正三角形でできたトラスとし、载荷点のたわみを求めよう。まず下の図のような静定系を考えて、中間支점에相当する格点に不静定反力 X を作用させる。そして、この支点の変位を単位荷重法で求めて、それが零である条件から不静定反力 X を求めよう。まず支点反力は

$$F_1 = \frac{P}{3} + \frac{2X}{3}, \quad F_2 = \frac{2P}{3} + \frac{X}{3}$$

と求められるので、各弦材の軸力を求めると

$$\begin{aligned} N^{(1)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}(P+2X), & N^{(2)} &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(P+2X), & N^{(3)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}(P+2X), & N^{(4)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}(P+2X), \\ N^{(5)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}(X-P), & N^{(6)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(P+X), & N^{(7)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}(X-P), & N^{(8)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}(2P+X), \\ N^{(9)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}(2P+X), & N^{(10)} &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(2P+X), & N^{(11)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}(2P+X) \end{aligned}$$

となる。したがって、この不静定反力が作用した点に単位荷重を載せた場合の軸力も $X = 1, P = 0$ と置いて

$$\begin{aligned} N_u^{(1)} &= -\frac{4}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(2)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(3)} &= \frac{4}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(4)} &= -\frac{4}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(5)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(6)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ N_u^{(7)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(8)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(9)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(10)} &= \frac{1}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(11)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

と求められる。この二つの軸力を式(4.100)に代入して支点のたわみ Δ_X が零になる条件は

$$\Delta_X = \sum_{n=1}^{11} \frac{N^{(n)} N_u^{(n)}}{EA} \ell = 0$$

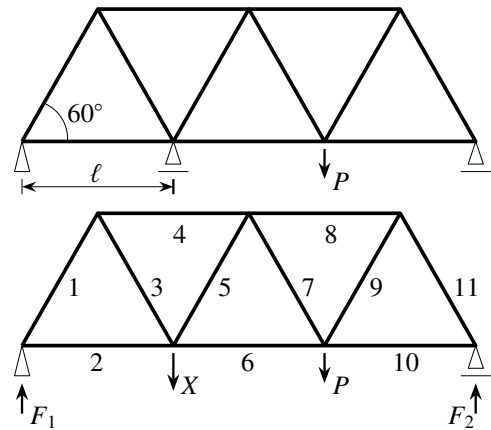


図 4.91 連続トラス

となるので、実際に軸力の値を代入すると、不静定反力が

$$53P + 82X = 0 \rightarrow X = -\frac{53}{82}P$$

と求められる。すべての断面と材料が同じなので比較的容易に計算できるが、実際のトラスのように引張と圧縮で断面が異なる場合には、とても手で計算しようという気持ちにはなれないのが正直なところである。

この結果を上軸力に代入すると、各弦材の軸力が

$$N^{(1)} = \frac{8}{41\sqrt{3}}P, N^{(2)} = -\frac{4}{41\sqrt{3}}P, N^{(3)} = -\frac{8}{41\sqrt{3}}P, N^{(4)} = \frac{8}{41\sqrt{3}}P, N^{(5)} = -\frac{45}{41\sqrt{3}}P, N^{(6)} = \frac{29}{82\sqrt{3}}P, \\ N^{(7)} = \frac{45}{41\sqrt{3}}P, N^{(8)} = -\frac{37}{41\sqrt{3}}P, N^{(9)} = \frac{37}{41\sqrt{3}}P, N^{(10)} = \frac{37}{82\sqrt{3}}P, N^{(11)} = -\frac{37}{41\sqrt{3}}P$$

と求められる。ここで $P = 1$ としたものがそれぞれの $N_u^{(n)}$ なので、再度単位荷重法の式 (4.100) にその二つの軸力を代入すれば、載荷点のたわみ Δ_P が

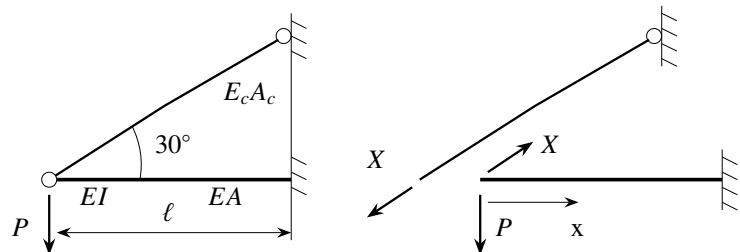
$$\Delta_P = \frac{145P\ell}{82EA}$$

と求められる。これも電卓が無いと無理! がしかし、先輩達は電卓も無い時代に計算尺⁴¹を使って、あんなに立派な橋梁等を建設してきたのである。

4.8.3 骨組の変位と断面力

(1) 梁とトラスでできた不静定構造

最初は図 4.92 に示したような梁とトラスで構成された構造を解いておこう。まず右図のように二つの系に分解し、不静定力 X を導入する。これでケーブルは



$$N = X, N_u = 1$$

図 4.92 梁をケーブル (トラス) で吊った構造

でいいので、この先端の X 方向の変位は、単位荷重法を用いるまでもなく

$$\Delta_X^{(c)} = \frac{X}{EcAc} \frac{2\ell}{\sqrt{3}}$$

である。一方、梁の軸力と曲げモーメントは

$$N = -\frac{\sqrt{3}}{2}X, M = -\left(P - \frac{1}{2}X\right)x, N_u = -\frac{\sqrt{3}}{2}, M_u = \frac{1}{2}x$$

なので、軸力と曲げモーメントの両方を含む単位荷重法の公式 (4.99) に代入すれば、先端の X 方向の変位が

$$\Delta_X = \frac{X\ell}{EA} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{EI} \int_0^\ell \left(P - \frac{X}{2}\right)x \left(\frac{x}{2}\right) dx = -\frac{P\ell^3}{6EI} + \left(\frac{3\ell}{4EA} + \frac{\ell^3}{12EI}\right)X$$

のように求められる。この二つの系を元に戻すことができるためには、不静定力がお互い逆向きなので

$$\Delta_X = -\Delta_X^{(c)}$$

⁴¹ 見たことありますか。東北大学土木の構造強度学研究室には手回し計算機が2台あります。これも見たことありますか。

を満足しなければならないから、最終的に不静定力 X が

$$X = P \left\{ \frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{3}EI}{E_c A_c \ell^2} + \frac{9I}{2A\ell^2} \right\}^{-1} \quad (*)$$

のように求められる。これで、ケーブルと梁の軸力と曲げモーメントをすべて P で表すことができるので、その $P = 1$ とした軸力と曲げモーメントと共に単位荷重法の式 (4.99) に代入すれば、梁先端の鉛直下向きの変位を求めることができる。

(2) 静定骨組

まず図 4.93 の左側に示した等足骨組の右上角点 A の水平変位を求めよう。反力は

$$F_1 = 0, \quad F_2 = P \quad H = P$$

と求められるので、部材力は

$$\begin{aligned} M(x_1) &= x_1 P, & N(x_1) &= 0, & (0 < x_1 \leq \ell/2), \\ M(x_1) &= \frac{\ell}{2} P, & N(x_1) &= 0, & (\ell/2 < x_1 < \ell), \\ M(x_2) &= \frac{\ell}{2} P, & N(x_2) &= 0, & (0 < x_2 \leq \ell/2), \\ M(x_2) &= (\ell - x_2) P, & N(x_2) &= 0, & (\ell/2 < x_2 < \ell), \\ M(x_3) &= 0, & N(x_3) &= -P \end{aligned}$$

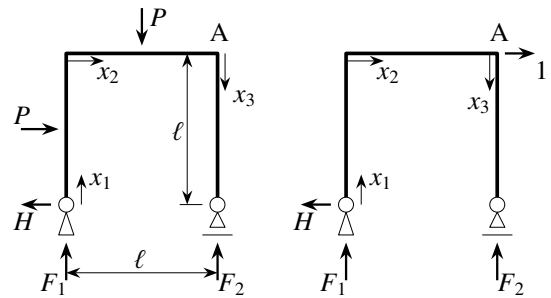


図 4.93 静定骨組

と求められる。そこで、単位荷重を点 A のみに作用させた右側の図の系を解くと、反力は

$$F_1 = -1, \quad F_2 = 1 \quad H = 1$$

と求められるので、部材力は

$$M_u(x_1) = x_1, \quad N_u(x_1) = 1, \quad M_u(x_2) = \ell - x_2, \quad N_u(x_2) = 1, \quad M_u(x_3) = 0, \quad N_u(x_3) = -1$$

となる。これを式 (4.99) の公式に代入すると、点 A の水平変位 Δ_A は

$$\Delta_A = \frac{P}{EI} \left(\int_0^{\ell/2} x_1^2 dx_1 + \frac{\ell}{2} \int_{\ell/2}^{\ell} x_1 dx_1 + \frac{\ell}{2} \int_0^{\ell/2} (\ell - x_2) dx_2 + \int_{\ell/2}^{\ell} (\ell - x_2)^2 dx_2 \right) + \frac{P}{EA} \int_0^{\ell} dx_3 = \frac{11P\ell^3}{24EI} + \frac{P\ell}{EA}$$

と求められる。

ところで、細長さを代表するパラメータ（細長比と呼ばれる）として

$$\lambda \equiv \frac{\ell}{\sqrt{I/A}} \quad (4.103)$$

を導入すると、上の水平変位は

$$\Delta_A = \frac{P\ell^3}{EI} \left(\frac{11}{24} + \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

と表現できる。例えば少し太めの比較的短い部材の例として、1 辺が 50 cm の矩形断面で長さを 4 m とすると λ は 27.7 くらいになるので、上式の第 2 項は 1.3×10^{-3} となり第 1 項に比べると二桁程は小さい。一般的な骨組部材くらいにさらに細長い部材になると、この第 2 項はもっと小さくなって無視できるようになる。そのた

め、社会基盤構造のように細長い部材で構成された骨組の解析では、変位や不静定力を求めるときに軸力の影響を無視することの方が多い。ただし、応力を照査する場面では軸力の影響は無視できない。一つ前に対象としたケーブルで吊った梁の例の場合も、最後の不静定力の式(*)の第3項は通常は無視できる。さらにケーブルの伸びも無視できるのであれば第2項も無くなり $X = 2P$ になるので、ケーブルは伸びず、梁も曲がらないで軸力だけが生じているのに伸び縮みしないという不思議な(梁が柱になったトラスの)答になる。

(3) 不静定骨組

まず図4.94の等足1次不静定骨組の載荷点Aの水平変位を求めよう。例えば右側の図のように右下の支点を動けるようにした静定系で、実際の反力 H_2 に相当する不静定反力 X を作用させる。そして右下支点の変位が零になる条件を単位荷重法で求めれば、その条件から X が求められる。そのあとは、点Aの変位を再度単位荷重法を用いて求めればよい。

まず右側の図の静定系の支点反力を求めると

$$F_1 = -P, \quad F_2 = P, \quad H = P - X$$

となるので

$$M(x_1) = x_1(P - X), \quad N(x_1) = P, \\ M(x_2) = \ell(P - X) + x_2 P, \quad N(x_2) = -X, \quad M(x_3) = -\ell X + x_3 X, \quad N(x_3) = -P$$

と求められる。右下支点の X 方向変位を求めるための単位荷重作用系では上式で $X = 1, P = 0$ として

$$M_u(x_1) = -x_1, \quad N_u(x_1) = 0, \quad M_u(x_2) = -\ell, \quad N_u(x_2) = -1, \quad M_u(x_3) = -\ell + x_3, \quad N_u(x_3) = 0$$

となる。以上の結果を式(4.99)の公式に代入すると、右下の支点の水平変位 Δ_X は

$$\Delta_X = \frac{X - P}{EI} \int_0^\ell x_1^2 dx_1 + \frac{\ell}{EI} \int_0^\ell \{x_2 P - \ell(P - X)\} dx_2 + \frac{X}{EI} \int_0^\ell (\ell - x_3)^2 dx_3 + \frac{X}{EA} \int_0^\ell dx_2 \\ = \left(\frac{5\ell^3}{3EI} + \frac{\ell}{EA} \right) X - \frac{5\ell^3}{6EI} P$$

と求められる。元の不静定骨組の右下支点は固定されているので、この変位が零になる条件から

$$\Delta_X = 0 \quad \rightarrow \quad H_2 = X = \left(1 + \frac{3I}{5A\ell^2} \right)^{-1} \frac{P}{2}$$

と、支点反力 H_2 を算定できることになる。

前の例で説明したように、部材は十分細長いものとして右辺の括弧の中の第2項が無視できる場合は

$$H_2 = \frac{P}{2}$$

を得る。よって、各部材に生じる曲げモーメントは

$$M(x_1) = \frac{1}{2} x_1 P, \quad M(x_2) = \left(\frac{\ell}{2} - x_2 \right) P, \quad M(x_3) = -\left(\frac{\ell}{2} - x_3 \right) P$$

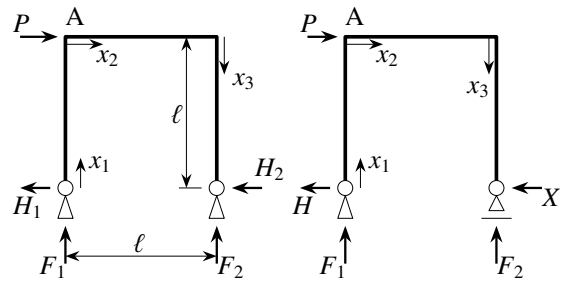


図4.94 不静定骨組

になり、点Aに単位荷重を作用させたときの曲げモーメントは上式で $P = 1$ とすればいいので

$$M_u(x_1) = \frac{1}{2} x_1, \quad M_u(x_2) = \left(\frac{\ell}{2} - x_2\right), \quad M_u(x_3) = -\left(\frac{\ell}{2} - x_3\right)$$

と求められる。これを再度式(4.99)の公式に代入すれば、点Aの水平変位 Δ_A が

$$\Delta_A = \frac{P}{EI} \left\{ \int_0^{\ell} \frac{x_1^2}{4} dx_1 + \int_0^{\ell} \left(\frac{\ell}{2} - x_2\right)^2 dx_2 + \int_0^{\ell} \left(\frac{\ell}{2} - x_3\right)^2 dx_3 \right\} = \frac{P \ell^3}{4EI}$$

となる。細長くない場合の答は各自計算してみるといい。

次に2次の不静定骨組の例として図4.95の等足骨組の載荷点の鉛直変位を求めよう。この例では、各部材は十分に細長いものとして軸力の影響は無視する。そこで右側の図のような静定系を考え、左の支点が回転できるようにした上で不静定モーメント X を作用させ、同時に右の支点を動けるようにした上で不静定反力 Y を作用させる。このようにして、左支点の回転変位 Θ_X と右支点の水平変位 Δ_Y の両方が零になる条件から、不静定モーメント X と不静定反力 Y を求めよう。まず支点反力は

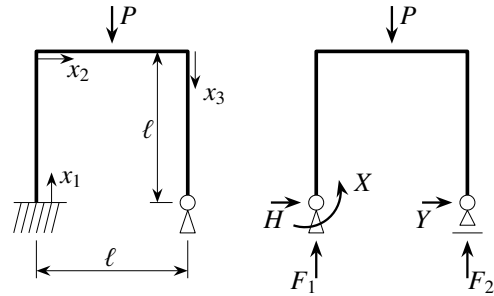


図4.95 2次の不静定骨組

$$F_1 = \frac{P}{2} + \frac{X}{\ell}, \quad F_2 = \frac{P}{2} - \frac{X}{\ell}, \quad H_1 = -Y$$

となるので、各部材の曲げモーメントは

$$M(x_1) = Y x_1 - X, \quad M(x_2) = \left(\frac{P}{2} + \frac{X}{\ell}\right) x_2 + (\ell Y - X), \quad (0 < x_2 \leq \ell/2),$$

$$M(x_2) = \ell Y + \left(\frac{P}{2} - \frac{X}{\ell}\right) (\ell - x_2), \quad (\ell/2 < x_2 < \ell), \quad M(x_3) = (\ell - x_3) Y$$

と求められる。

したがって、左の回転変位 Θ_X を求めるために単位モーメント X を作用させた系の曲げモーメント $M_u^X(x)$ は、上式の曲げモーメントで $X = 1, Y = 0, P = 0$ とすればいいので

$$M_u^X(x_1) = -1, \quad M_u^X(x_2) = \frac{x_2}{\ell} - 1, \quad M_u^X(x_3) = 0$$

でいい。また右の支点変位 Δ_Y を求めるための系の曲げモーメント $M_u^Y(x)$ も同様に $X = 0, Y = 1, P = 0$ とすればいいので

$$M_u^Y(x_1) = x_1, \quad M_u^Y(x_2) = \ell, \quad M_u^Y(x_3) = \ell - x_3$$

となる。上の曲げモーメント $M(x)$ と前者の $M_u^X(x)$ を式(4.63)に、また $M(x)$ と後者の $M_u^Y(x)$ を式(4.62)にそれぞれ代入して求められる回転角とたわみを

$$\Theta_X = \int_{3 \text{ 部材}} \frac{M(x) M_u^X(x)}{EI} dx = 0, \quad \Delta_Y = \int_{3 \text{ 部材}} \frac{M(x) M_u^Y(x)}{EI} dx = 0$$

と置けば、 X と Y に対する連立方程式を得る。この積分を実行するとそれぞれが

$$\frac{1}{16} \ell P - \frac{4X}{3} + \ell Y = 0, \quad \frac{1}{8} \ell P - X + \frac{5\ell Y}{3} = 0$$

となるので、これを解けば

$$X = -\frac{3}{176} \ell P, \quad Y = -\frac{15}{176} P$$

を得る。と書いたが、連立方程式を得るための積分を著者は3回間違った。そして、求められた X と Y を上の曲げモーメントに代入すれば、それは

$$M(x_1) = \frac{P}{176} (3\ell - 15x_1), \quad M(x_2) = \frac{P}{176} (85x_2 - 12\ell), \quad (0 < x_2 \leq \ell/2),$$

$$M(x_2) = \frac{P}{176} (76\ell - 91x_2), \quad (\ell/2 < x_2 < \ell), \quad M(x_3) = \frac{15P}{176} (x_3 - \ell)$$

となる。ここで再度、この式で $P = 1$ と置いて得られる単位荷重系の曲げモーメント $M_u^P(x)$ を求め、それを用いて式(4.62)に代入すると、载荷点の下向き鉛直変位 Δ_P が⁴²

$$\Delta_P = \int_{3 \text{ 部材}} \frac{M(x) M_u^P(x)}{EI} dx = \frac{95}{8448} \frac{P\ell^3}{EI}$$

と求められる。と書いたが、再度、この積分も何度か間違ったし、電卓⁴²が無いとこんな大きな数値を伴う分数計算は不可能だ。3次の不静定構造なんてのは各種試験には出せない。怪我をします!

4.8.4 アーチの力学

アーチも曲がった骨組と捉えていいかもしれないが、ひずみ分布が線形にならない等、一般的な曲線座標系における基本的な支配方程式を最初から勉強し直す必要がある。例えば文献[101]等を参照のこと。この文書でもアーチを対象としたような数値計算例がいくつかあるが、すべて折れ線近似[45]した骨組である。

演習問題 4-14

31. 式(4.101)を求め、幾何学的な考察で確認せよ。また、鉛直変位が下方に $\frac{P\ell}{4\sqrt{3}EA}$ になることを示せ。
32. 式(4.102)を求めよ。
33. ここの不静定トラスと骨組の例の計算を一度はやっておくこと。

4.9 仮想仕事の原理を用いた梁理論の定式化

4.9.1 仮想仕事式

Bernoulli-Euler の仮定の下で定式化される初等梁理論では、せん断力が内部のせん断応力と定義上は対応しておらず、一見妙な理論に見えていたと思う。また境界条件の正しい組み合わせについても、初学者にはあまり理解できなかったかもしれない。ここでは仮定に基づく定式化を純粋に数学的に実行する[172]ことによって、せん断力が見かけの断面力であることを示しておく。ただもちろん梁理論が、まず直応力を簡便かつ正確に求めるための近似理論であるということは注記しておきたい。さて、梁も3次元空間の細長いものとして捉えればいいので、その仮想仕事式は3次元の式(3.131)と同じであり、表面積分も抽象的に全表面 S に拡張すれば、形式的には

$$\int_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_V \sum_{i=1}^3 X_i \delta u_i dV - \int_S \sum_{i=1}^3 \bar{F}_i \delta u_i dS = 0 \quad (4.104)$$

⁴² 平成の二桁になってから電卓を買い換えたのだが、分数のまま計算をする設定になっていてとても衝撃を受けた。さて京都大学の森毅先生の随筆(文献は失念)で、小学校の先生が分数をきちんと教えることができないと嘆いておられた。面白い逸話だが、「 $1/5 + 2/5 = \frac{3}{5}$ 」と回答して零点をもらった女子児童が「うちは3人家族だから男はパパだけ。お隣は5人家族で男の子は一人だから男は二人。両方の家族で男の割合を足すと $3/8$ だから間違っていないよ。」と答え、先生がその間違いを正せなかったとか。面白い。また小学2年生に対する掛け算には順序があり、「6人の子どもにあめを7こずつくばるとき、あめは何こいらいますか」という問題の正解は「 $7 \times 6 = 42$ 」なのであって、「 $6 \times 7 = 42$ 」は間違いになる。つまり小学低学年の「算数」の中身には「国語」あるいは「先生の言ったことを守らせること」が含まれているらしい。東北大学のWebeck先生のお嬢さんが減点されてすごく怒っていた。もう一つ、「 $3.9 + 4.1 = 8.0$ 」も減点される。正しい答をしばらく考えたあと p.1003 の正答(★)に腹を立てて欲しい。小学校とは不思議な教育現場なのだ。

でいいことになる。 δ の付いた仮想場は運動学的許容場である。ここを出発点として、第3.5.1(2)節で説明した手順に沿って、この運動学的許容場に対応する静力学的許容場を求めることによって、梁理論を定式化しよう。

4.9.2 梁の微小変位理論

(1) 変位場 — 運動学的許容場

まず変位場に対する基本的な二つの仮定から得られる式(4.5)(4.6)の変位場とひずみ場を書き直すと

$$u_x(x, z) = u(x) - z w'(x), \quad u_z(x, z) = w(x) \quad \epsilon_{xx}(x, z) = u'(x) - z w''(x) \quad (4.105a, b, c)$$

となる。この式の変分量を算定しておくそれぞれ

$$\delta u_x = \delta u - z \delta w', \quad \delta u_z = \delta w, \quad \delta \epsilon_{xx} = \delta u' - z \delta w'' \quad (4.106a, b, c)$$

となる。

(2) 梁に対する仮想仕事式

長さ l の梁の場合、その軸線を x 方向にとることにすれば、仮想仕事式の体積積分と面積積分は

$$\int_V dV = \int_0^l dx \int_A dA, \quad \int_S dS = \int_A dA \Big|_{x=0, l}$$

と置き直せばいい。つまり、体積積分は梁断面と軸方向の積分に分ければよく、表面力は梁の表面(上下面と側面)には直接作用しないから面積積分は梁の両端の断面だけが対象となる。仮想仕事式(4.104)に前節の変位場を代入すれば、仮定に基づく梁の運動場の範囲内で力学原理が記述できているはずである。式(4.106c)のように零でない仮想ひずみ成分は $\delta \epsilon_{xx}$ 成分のみであるから、まず第1項の内力仮想仕事は

$$\int_V \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} dV = \int_0^l \int_A \sigma_{xx} (\delta u' - z \delta w'') dA dx$$

だけになる。さらに式(4.9)(4.11)で定義した軸力 N と曲げモーメント M とを用いると上式は

$$= \int_0^l (N \delta u' - M \delta w'') dx$$

と書くことができる。被積分関数の第1項を1回、第2項を2回部分積分すると

$$= [N \delta u - M \delta w' + M' \delta w] \Big|_0^l - \int_0^l (N' \delta u + M'' \delta w) dx$$

となるが、式(4.26)の記号を用いると

$$= n_i [N \delta u + M \delta(-w') + M' \delta w] \Big|_{x=0, l} - \int_0^l (N' \delta u + M'' \delta w) dx \quad (4.107)$$

とも表すことができる。

次に仮想仕事式の第2項の体積力による仮想仕事も、式(4.106a)(4.106b)の変位成分の変分の関係式を代入すると

$$\int_V (X_x \delta u_x + X_z \delta u_z) dV = \int_0^l \left[\int_A X_x (\delta u - z \delta w') dA + \int_A X_z \delta w dA \right] dx$$

でいいことになる。したがって分布外力を

$$p \equiv \int_A X_x dA, \quad q \equiv \int_A X_z dA, \quad m \equiv \int_A z X_x dA \quad (4.108a, b, c)$$

と定義すると上式は

$$= \int_0^\ell [p \delta u - m \delta w' + q \delta w] dx$$

となるので、第2項を部分積分して式(4.26)の記号を用いると

$$= n_i [-m \delta w] \Big|_{x=0, \ell} + \int_0^\ell \{p \delta u + (m' + q) \delta w\} dx \quad (4.109)$$

となる。式(4.108a)(4.108b)の p と q はそれぞれ x, z 方向の梁の単位長さ当たりの分布外力である。それに対し、式(4.108c)の m はその定義からも明らかのように、梁の単位長さ当たりに分布する曲げ外力モーメントであり、無視されることが多い。

最後に仮想仕事式の第3項は上述のように梁の両端の面積分のみであるから

$$\int_A (\bar{F}_x \delta u_x + \bar{F}_z \delta u_z) dA \Big|_{x=0, \ell}$$

となる。したがって第2項の体積力についての演算と同様、式(4.106a)(4.106b)を代入し、端外力を

$$F_i \equiv \int_A \bar{F}_x dA, \quad S_i \equiv \int_A \bar{F}_z dA, \quad C_i \equiv \int_A z \bar{F}_x dA \quad (4.110a, b, c)$$

と定義する(ただし $x=0$ の面で $i=1$, $x=\ell$ の面で $i=2$)と、結局この端外力の仮想仕事項は

$$[F_i \delta u + C_i \delta(-w') + S_i \delta w] \Big|_{x=0, \ell} \quad (4.111)$$

と書くことができる。 F_i, S_i, C_i はそれぞれ両端の軸力・せん断力および外力モーメントである。

以上の各項(4.107)(4.109)(4.111)をすべて結合すると、梁の仮想仕事式の一つの表現が

$$\begin{aligned} & [(n_i N - F_i) \delta u + \{n_i (M' + m) - S_i\} \delta w + (n_i M - C_i) \delta(-w')] \Big|_{x=0, \ell} \\ & - \int_0^\ell [(N' + p) \delta u + \{M'' + m' + q\} \delta w] dx = 0 \end{aligned} \quad (4.112)$$

となる。ちなみに梁の仮想仕事式の標準形は式(5.20)である。

(3) 梁のつり合い式と境界条件

式(4.112)の仮想仕事式は任意の仮想変位 δu と δw に対して常に満足されなければいけないという条件によって、変分問題のEuler方程式が梁のつり合い式になり、副次的に適切な境界条件も誘導できる。すなわち、まず式(4.112)の第2行の被積分関数から局所的なつり合い式が

$$N'(x) + p(x) = 0, \quad M''(x) + m'(x) + q(x) = 0 \quad (4.113a, b)$$

でないといけないことがわかる。もし m を無視すれば、この式はそれぞれ式(4.19)(4.20)に一致している。また境界条件については、仮想仕事式(4.112)の第1行にある両端の項から $x=0, \ell$ ($i=1, 2$)において

$$u(x) = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i N(x) = F_i, \quad (4.114a)$$

$$w(x) = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \{M'(x) + m(x)\} = S_i, \quad (4.114b)$$

$$-w'(x) = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i M(x) = C_i \quad (4.114c)$$

という組み合わせになることがわかる。これも式(4.25)に一致する。このように、仮定された運動場の元で誘導される梁理論にはせん断力が一切現れないが、せん断力のつり合い式(4.113b)と境界条件式(4.114b)の形から $V(x) \equiv M'(x) + m(x)$ と定義できることはわかる。結局、梁理論におけるせん断力は曲げモーメントの勾配として副次的に定義されることになる。数学というのは便利で強力な道具なのだ。

MURPHY'S LAW — Other Contributions [11] 主法則は p.12 に。

Ettore's Observation

The other line moves faster.

Fett's Law of The Lab

Never replicate a successful experiment.

Wyszowski's First Law

No experiment is reproducible.

Futility Factor

No experiment is ever a complete failure — it can always serve as a negative example.

Young's Law

All great discoveries are made by mistake.

Corollary

The greater the funding, the longer it takes to make the mistake.

Tenenbaum's Law of Replicability

The most interesting results happen only once.

Theory of Selective Supervision

The one time in the day that you lean back and relax is the one time the Boss walks through the office.

Edwards' Time/Effort Law

Effort \times Time Constant

A. Given a large initial time to do something the initial effort will be small.

B. As time goes to zero, effort goes to infinity.

Corollary

If it weren't for the last minute, nothing would get done.

'See you tomorrow!' 夕方から深夜までの間に大学内を清掃してくれる janitor あるいは custodian は主に Hispanic⁴³系の人達だった。だから研究室のゴミ箱の始末に来てくれたときは「コモエスタ」「ムィヴィエングラシアス」となる。ある夜の廊下で、帰宅しようとしていた友人の日本人留学生が清掃員に「あした間に合わない!」と言って手を振っていた。面白いねえ。

⁴³ 確か Time Magazine だったと思うが、冠詞が 'An' なのか 'A' なのかについての議論が掲載されたことがある。どっちなんだろう。